

# 旋转二次曲面透镜基点研究

徐海斌 顾菊观

(湖州师范学院理学院 浙江湖州 313000)

(收稿日期:2021-01-07)

**摘要:**给出了旋转二次曲面透镜基点位置的计算公式.为了验证旋转二次曲面透镜基点位置公式的可靠性,根据 TracePro 光路设计软件对光线追迹的特点,对旋转二次曲面透镜的基点位置及其变化率测定进行了虚拟仿真.研究显示,光线入射高度较低时,旋转二次曲面透镜的基点位置参数与公式计算理论值一致.随着入射高度逐渐增加,主点及其变化率受 conic 系数影响较小,主要由入射高度决定;焦点、焦距及其变化率与入射高度和 conic 系数均有关,conic 系数越大,变化越明显.该研究对透镜结构参数及光阑的选择具有一定的参考意义,也能有效拓展光学课程中球面透镜的教学内容.

**关键词:**旋转二次曲面透镜 基点位置 基点位置变化率 TracePro 虚拟仿真

## 1 引言

透镜在光学教学和光路设计中的应用非常普遍<sup>[1,2]</sup>.透镜参数的选择在很大程度上影响了其效果.因此,对透镜特性的研究具有着重要的意义.

透镜基点位置是描述透镜特征的重要参数.现有光学教材往往只对球面透镜进行阐述,给出傍轴近似下基点位置参数的公式.玻恩在《光学原理》一书中对旋转二次曲面的几何光学成像问题进行了初步探讨,但是并没有给出其具体形式<sup>[3]</sup>.在实际光路设计中,非球面透镜因为其较多的优势,得到了广泛的研究与应用<sup>[4~6]</sup>.基于非球面透镜应用的仿真研究也得到了广泛的开展<sup>[7~11]</sup>.基于几何光学基本原理及二次曲面的数学描述<sup>[12]</sup>,一些研究者对二次曲面透镜参数进行了理论研究,并在各种近似下给出其基点位置描述公式及成像特征<sup>[13~15]</sup>.由于实际透镜加工的限制和测量的不便,使得这些研究结论并没有得到明确的实验验证.同时,现有研究很大程度仅仅考虑曲面顶点曲率半径对基点参数的影响.而二次曲面 conic 系数是描述旋转二次曲面特征的重要参数.因此,考虑二次曲面 conic 系数对透镜基点参数究竟会产生怎么样的影响就变得非常有必要.

作为虚拟仿真软件,TracePro 具有简单便捷、容易入门、结果可靠直观、能实现图形显示及可视化操作等优点.该软件一个重要特点就是其利用几何光学的基本原理,采用了光线追迹的方法,对每条光线在光学器件中的传输进行仿真演示.这种虚拟仿真所取得的效果,可以避免傍轴近似所带来的偏差,同时也可以有效克服几何光学实验观察条件限制的不足.以对称旋转二次曲面会聚透镜为例,利用该软件对其进行了虚拟仿真.仿真结果实现了对傍轴近似条件下透镜基点位置描述公式的验证,并对二次曲面 conic 系数和入射高度对基点位置、焦距及其变化率的影响进行了分析,为具有不同 conic 系数旋转二次曲面透镜成像的光线选择提供一定的参考.该虚拟仿真方法同样适用于自由曲面透镜特性的研究<sup>[16]</sup>.

## 2 旋转二次曲面透镜

### 2.1 基本结构

旋转二次曲面包括最常见的球面、抛物面、椭球面和双曲面,其中 conic 系数决定了二次曲面的面形.旋转二次曲面的标准面面形公式可以表示为<sup>[12]</sup>

$$z = \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2r^2}} \quad (1)$$

其中  $c$  为曲率,  $R$  为曲率半径:  $c = \frac{1}{R} = \pm \frac{b^2}{a}$ ;  $k$

为 conic 系数:  $k = -\varepsilon^2 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)$ ,  $\varepsilon$  为偏心率;  $r^2 = x^2 + y^2$ . 因为是旋转二次曲面, 可选取通过其对称轴的截面进行描述. 本文所采用旋转二次曲面均以  $z$  轴为旋转对称轴, 取  $yOz$  平面作为观察面. 对于椭圆,  $a$  和  $b$  分别为其长、短轴; 对于双曲线,  $a$  和  $b$  分别为其实、虚轴. 对于抛物线而言, 式(1)可简化为  $y^2 = 2Rz$ . 这样, 旋转二次曲面的结构参数可以用顶点曲率半径  $R$  和 conic 系数  $k$  来表示.

考虑一个具有 A 和 B 两个旋转二次曲面的透镜, 透镜折射率为  $n$ , 厚度为  $d$ , 置于折射率为  $n_0$  的介质中. 其顶点曲率半径和 conic 系数分别为  $R_A, R_B$  和  $k_A, k_B$ . 透镜示意图如图 1 所示.  $R_A$  和  $R_B$  的正负可任意选择, 根据几何光学符号规则, 其正负决定了该透镜为会聚或发散透镜. 由几何光学知识可知, 图 1 透镜的物方焦点、物方主点、像方主点和像方焦点分别是光轴上的  $F, H, H'$  和  $F'$ , 基点的参数位置分别可以用  $f, f', l_F, l'_F, l_H$  及  $l'_H$  进行描述. 考虑透镜置于空气中, 其节点与主点重合. 因此, 以下论文所研究的基点即焦点和主点, 过基点作垂直于光轴的平面即为基面.

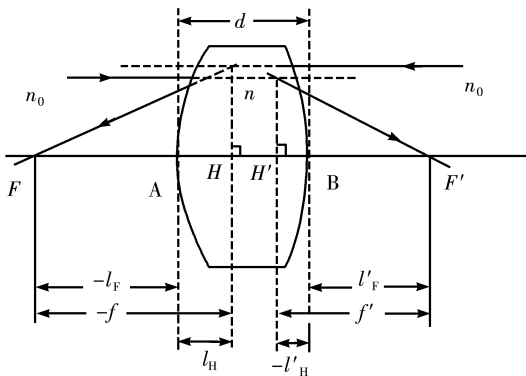


图 1 旋转二次曲面透镜结构示意图

## 2.2 旋转二次曲面透镜的基点

对于任意一个旋转二次曲面, 假定其左右两侧介质折射率分别为  $n_0$  和  $n$ , 则其焦距可以表述为<sup>[13]</sup>

$$f'_0 = \frac{n}{n - n_0} R \quad (2)$$

对于具有图 1 的透镜结构而言, 可得 A 界面和 B 界面的焦距分别为

$$f_A = \frac{n_0}{n_0 - n} R_A \quad f'_A = \frac{n}{n - n_0} R_A \quad (3)$$

$$f_B = \frac{n}{n - n_0} R_B \quad f'_B = \frac{n_0}{n_0 - n} R_B \quad (4)$$

图 1 中 A 和 B 两个界面顶点之间的距离为  $d$ , 则两层界面之间的光学间隔为

$$\Delta = d - f'_A + f_B \quad (5)$$

具有两个界面的透镜, 类似于两个光学系统的组合. 透镜基点可以用图 1 中的  $f, f', l_F, l'_F, l_H$  及  $l'_H$  等参数进行描述, 由几何关系可得到该透镜的焦距、焦点及主点位置为<sup>[17]</sup>

$$f' = -f = -\frac{f'_A f'_B}{\Delta} =$$

$$\frac{nm_0 R_A R_B}{(n - n_0)[n(R_B - R_A) + (n - n_0)d]} \quad (6)$$

$$l'_F = f' \left(1 - \frac{d}{f'_A}\right) \quad l_F = f \left(1 + \frac{d}{f_B}\right) \quad (7)$$

$$l'_H = -f' \frac{d}{f'_A} \quad l_H = f \frac{d}{f_B} \quad (8)$$

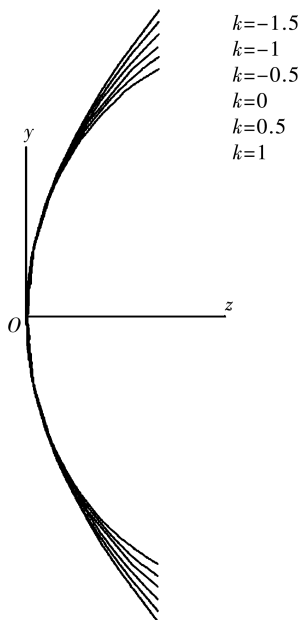
由上述透镜基点位置公式并结合图 1 可以看出, 基点位置与二次曲面透镜的 conic 系数并没有关系. 这是在推导上述关系时, 进行了一些近似有关. 因此, 很有必要对不同 conic 系数下透镜的基点位置进行观察, 寻找 conic 系数对透镜基点位置变化的影响.

## 3 旋转二次曲面透镜建模及基点位置分析

利用 TracePro 软件可自由建模二次曲面透镜. 对称或非对称旋转二次曲面透镜均可采用同样的建模方法进行仿真研究. 为简单直观, 这里主要采用具有固定参数的对称旋转二次曲面透镜结构进行仿真研究.

### 3.1 不同 conic 系数的曲面特征

现有理论研究结果并没有考虑二次曲面的 conic 系数对透镜的影响. 图 2 给出了在相同的顶点曲率半径下不同 conic 系数所对应曲面在  $yOz$  平面上的截面图. 随着 conic 系数从 1 逐渐变化到  $-1.5$ , 可以发现旋转二次曲面逐渐趋向平坦, 因此, conic 系数的不同必然会影响光线在曲面折射的效果. 这一点尤其是在入射高度较大时, 将会变得更加明显. conic 系数与典型的旋转二次曲面有一定的对应关系. 当  $k > 0$  时, 对应横椭球面;  $k = 0$  对应球面;  $0 > k > -1$  对应竖椭球面;  $k = -1$  对应抛物面;  $k < -1$  对应双曲面.

图2 不同 conic 系数旋转二次曲面在  $yOz$  平面上的截面图

### 3.2 旋转二次曲面透镜的基点位置

TracePro 软件是追迹光线在各种材料及光学器件内传输的几何演示. 根据基点的定义, 可以找出各种入射高度下基点的几何位置, 并给出其变化规律. 一方面可以验证理论公式计算的可靠性, 另一方面, 由于理论公式的推导是基于傍轴近似下的结果, 通过利用软件虚拟仿真, 可以进一步考查实际基点位置的修正.

图3展示了在虚拟仿真中寻找透镜像方基点位置的示意图.

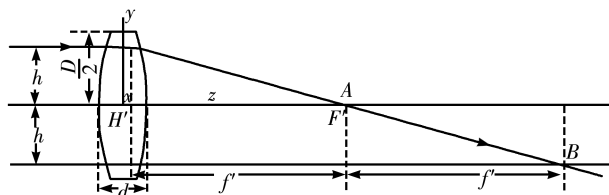


图3 像方基点位置示意图

由于软件中图片可以放大, 因此, 可以精确给出不同参数下透镜的基点位置坐标. 图3中的  $z$  轴为光轴. 透镜的厚度为  $d$ , 半孔径为  $\frac{D}{2}$ . 入射高度为  $h$ , 平行于光轴的光经过透镜后与光轴的交点为  $A$ .  $A$  点即为透镜的像方焦点.  $B$  为出射光线与光轴下方高度为  $-h$  的直线的交点. 根据几何知识及像方主点位置的定义可知,  $B$  点  $z$  轴坐标和透镜主点的  $z$  轴坐标关于  $A$  点的  $z$  轴坐标对称, 并且  $B$  点  $z$  坐标与  $A$  点  $z$  坐标的差值即为像方焦距. 因此, 可以很方便的

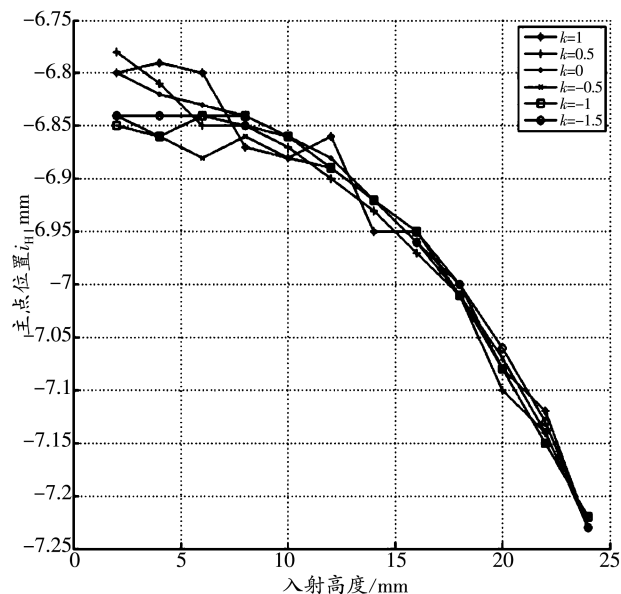
确定该入射高度下透镜的像方主点和焦点. 同样的方法也可以确定物方主点和焦点.

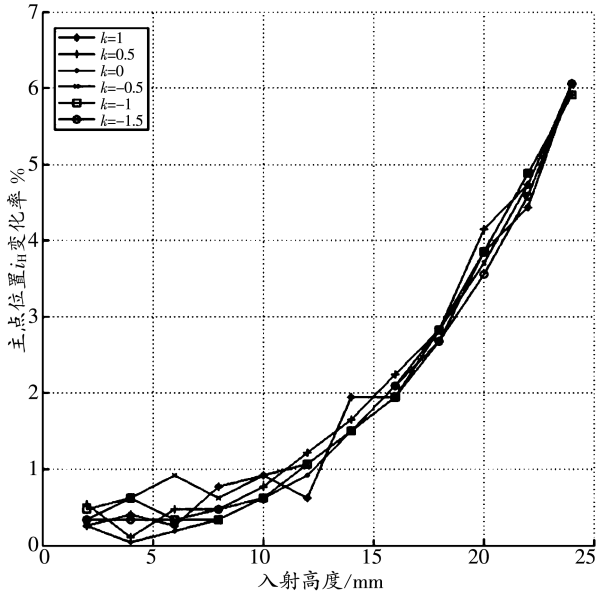
### 3.3 旋转二次曲面透镜基点位置虚拟仿真

为便于比较, 仿真实验仅仅对具有相同顶点曲率半径, 不同入射高度和不同 conic 系数下基点位置进行分析. 当透镜其他相关参数发生变化时, 可以使用同样的虚拟仿真方法进行分析.

取透镜半孔径为  $30\text{ mm}$ , 二次曲面的顶点曲率半径  $R=100\text{ mm}$ , 材料为肖特基玻璃的 BK7 ( $\lambda=0.55461\text{ }\mu\text{m}$  时,  $n=1.51872$ ), conic 系数  $k$  分别选取  $1, 0.5, 0, -0.5, -1, -1.5$ . 经过式(6)~(8)计算, 可以在理论上得到像方主点位置  $l'_H = -6.8173\text{ mm}$ , 像方焦点位置  $l'_F = 92.9824\text{ mm}$ , 像方焦距  $f' = 99.7997\text{ mm}$ .

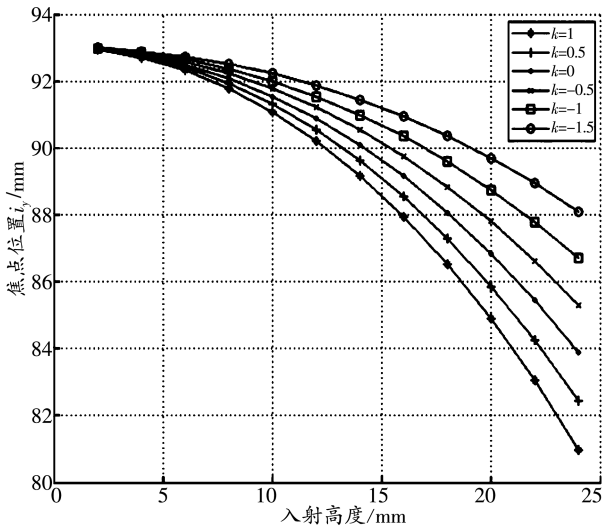
当 conic 系数和光线入射高度发生变化时, 透镜的主点位置及其变化率随之发生了变化. 从图4(a)可以看出, 主点位置随光线入射高度发生较为明显的变化, 而对 conic 系数并不是非常敏感. 当光线入射高度越来越小时, 像方主点位置趋于理论计算值. 图4(b)给出了主点位置变化率随 conic 系数及光线入射高度的变化特性. 当入射高度低于  $10\text{ mm}$  时, 不同 conic 系数的旋转二次曲面透镜主点位置变化率均小于  $1\%$ . 随着入射高度的增加, 其主点位置变化率迅速变大, 与 conic 系数的大小关系不大. 图4显示了主点位置及其变化率主要与光线入射高度有关.

(a) conic 系数发生变化时主点位置  $i_H$  变化率随入射高度的变化

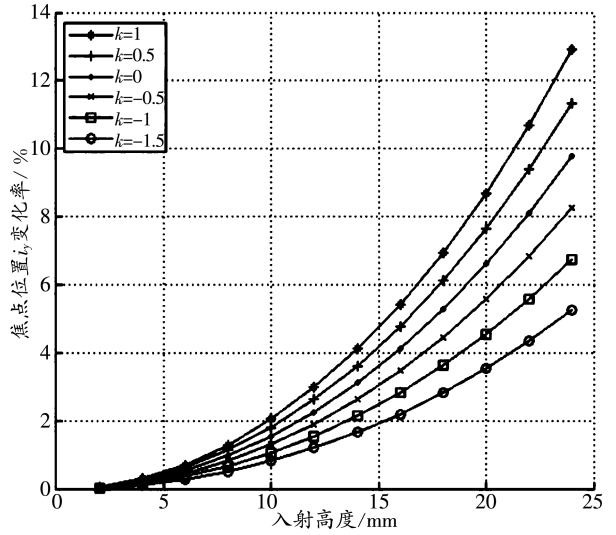


(b) conic 系数发生变化时主点位置  $i_H$  变化率随入射高度的变化

图 4 透镜主点位置及其变化率随 conic 系数和光线入射高度的变化  
 透镜焦点位置及其变化率随 conic 系数和光线入射高度的变化如图 5 所示. 图 5(a) 中透镜焦点位置随 conic 系数和光线入射高度变化明显. 随着光线入射高度逐渐增加, 焦点位置逐渐向透镜靠拢. conic 系数越大, 这种变化就越明显. 当入射高度逐渐减小, 不同 conic 系数的透镜焦点都逐渐趋于理论计算值. 图 5(b) 给出了焦点位置变化率随 conic 系数及入射高度的变化关系. 当入射高度较大时, conic 系数越大, 焦点位置变化率越大. 随着入射高度的减小, 焦点位置变化率逐渐趋向于零. 图 5 显示了焦点位置及其变化率与光线入射高度及 conic 系数有关, 并且入射高度越高, conic 系数越大, 这种变



(a) conic 系数发生变化时焦距位置  $i_f$  随入射高度的变化



(b) conic 系数发生变化时焦距位置  $i_f$  变化率随入射高度的变化

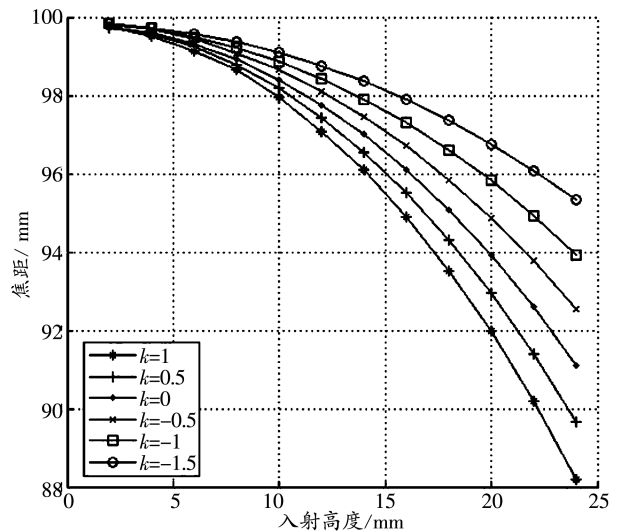
图 5 透镜焦点位置及其变化率随 conic 系数和光线入射高度的变化就越明显.

透镜焦距及其变化率随 conic 系数和光线入射高度的变化如图 6 所示.

图 6(a) 显示随着入射高度和 conic 系数的变大, 焦距逐渐减小. 当入射高度减小时, 焦距逐渐趋向理论值, 与 conic 系数无关.

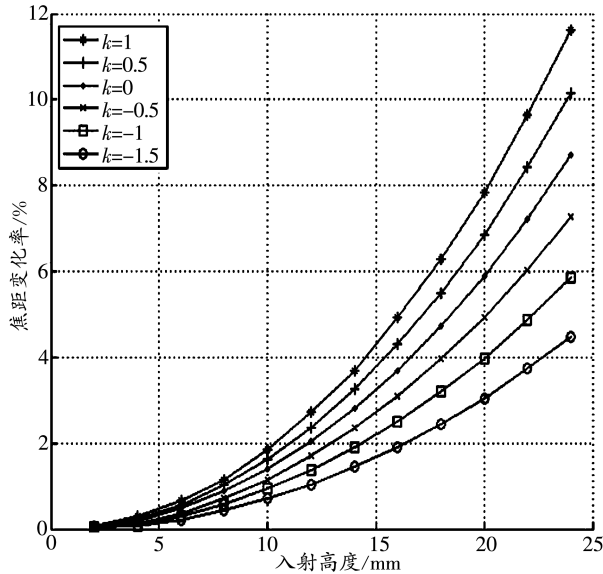
图 6(b) 显示了焦距变化率随入射高度及 conic 系数的变化规律. 焦距变化率随着入射高度及 conic 系数逐渐变小, 直至趋向于 0. 图 6 显示了焦距及其变化率与入射高度及 conic 系数有关.

通过对图 4、图 5 和图 6 的分析可知, 对于顶点曲率半径相同, 不同旋转二次曲面 conic 系数的透镜在光线入射高度较低时, 基点参数与理论计算值基本一致, 并且其变化率也较小. 当入射高度逐渐增加



(a) 不同 conic 系数下焦距随入射高度的变化





(b) 不同 conic 系数下焦距变化率随入射高度的变化

图6 透镜焦距及其变化率随 conic 系数和光线入射高度的变化

时,透镜主点位置及其变化率与 conic 系数关系不大;透镜焦点、焦距及其变化率受 conic 系数影响较大,conic 系数越大,这种变化越明显。

#### 4 结论

通过对旋转二次曲面透镜的分析,给出了旋转二次曲面透镜基点位置的计算公式.提出了一种验证透镜基点位置及其变化率的虚拟仿真方案.基于 TracePro 软件的虚拟仿真结果显示,对于光线入射高度较低的情况下,透镜基点位置的计算公式符合较好.对于光线入射高度逐渐增加时,透镜的主点位置及其变化率主要由入射高度决定,与 conic 系数关系不大;焦点位置、焦距及其变化率不但与光线入射高度有关,而且与 conic 系数有关.论文研究结果为透镜成像过程中的光线选择,尤其针对大口径,conic 系数不同的二次曲面透镜的光阑选择,提供了定性的参考.该实验方案也可为各种自由曲面的理论参数分析提供一种有效的验证方法。

该虚拟仿真分析方法为不便于实际测量参数的透镜等光学器件测试和光路设计提供一条有益的思路,可拓展大学物理光学教学中球面透镜的教学内容,使得学生对非球面透镜的特征具有更加形象具体的认识。

#### 参考文献

1 向柳媛,杨运珊,王俊豪,等.小孔成像的清晰度分析及其

- 在单透镜望远镜中的应用[J].物理通报,2018,121~124
- 2 周国全,段玉婕.正交柱面透镜的等厚干涉的 MATLAB 仿真[J].物理通报,2020(7):21~25
- 3 Max Born, Emil Wolf.光学原理[M].北京:世界图书出版公司北京公司,2001.211~214
- 4 程灏波,王英伟,冯之敬,等.光学非球面二次曲面常数及顶点曲率的研究[J].光学技术,2004,30(3):311~313,317
- 5 Chien-Yao Huang, Ching-Hsiang Kuo, Zong-Ru Yu, Cheng-Fang Ho, Chung-Ying Wang, Wei-Yao Hsu, Fong-Zhi Chen. Development of an intelligent grinding system for fabricating aspheric glass lenses[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2020, 111(5):1351~1359
- 6 李党娟,王佳超,陈阳,等.大功率长焦深高斯光束整形设计[J].光学精密工程,2020,28(10):2129~2137
- 7 谢小兵,王泽超,卢永斌.基于非球面透镜激光车灯的设计与加工[J].光学技术,2020,46(6):650~653
- 8 梁孙根,胡森,张春洋,等.基于近焦点非球面透镜的 LED 均匀照明设计[J].强激光与粒子束,2019,31(9):11~16
- 9 茹占强,宋贺伦,吴菲,等.高效非成像聚光光学系统设计与性能分析[J].光电工程,2020,47(2):34~41
- 10 胡军,许凯乐,马壮壮,等.基于广义 Maxwell 模型非球面透镜模压成型的仿真分析[J].激光与光电子学进展,2020,57(9):183~188
- 11 靳伍银,高姣林,刺昌峰.基于 Zemax 的消球差非球面透镜的优化设计[J].兰州理工大学学报,2018,44(5):168~172
- 12 Nagel H H. Displacement vectors derived from second order intensity variations in image sequences [J]. CVGIP,1983,21(1):85~117
- 13 傅景礼.旋转二次曲面的成像公式[J].大学物理,1998,17(2):1~7
- 14 郑世旺,王建波.旋转二次曲面折反折系统的基点和基面[J].纺织高校基础科学学报,2009,22(1):98~101
- 15 万建杰,赵鑫婷.费马原理在旋转二次曲面理想成像中的应用——主轴上物点[J].物理与工程,2019,29(4):23~28,34
- 16 杨通,段璎哲,程德文,等.自由曲面成像光学系统设计:理论、发展与应用[J].光学学报,2021,41(1):1~29
- 17 郁道银,谈恒英.工程光学[M].北京:机械工业出版社,2013.28~31