



质点的运动轨迹是圆的渐开线吗*

姜付锦 李 弼

(武汉市黄陂一中 湖北 武汉 430300)

张 静

(江苏省淮阴中学 江苏 淮安 223002)

(收稿日期:2021-01-19)

摘 要:通过对《物理教学》一篇论文中的问题进行深入研究,不仅给出了原文中质点最大速度的推导过程,还数值模拟了质点的运动规律,更加完善了原文中的分析结果.

关键词:洛伦兹力 圆的渐开线 数值模拟 运动轨迹

《物理教学》在2017年第6期发表了一篇关于一道浙江大学自主招生题的分析^[1],原文中虽然给出了质点的最终速度大小和方向,但没有给出推导过程,原文还认为质点运动轨迹是圆的渐开线,但是笔者以为这个分析有待商榷.本文尝试从动力学角度出发,得到质点动力学微分方程组,并给出质点运动规律的数值模拟解.

1 题目

【题目】如图1所示,在倾角为 θ 的粗糙斜面上存在垂直斜面向上的匀强磁场 B ,在斜面上由静止释放一个带正电质点.设质点的质量为 m ,带电荷量为 $+q$,斜面的动摩擦因数为 μ ,重力加速度为 g ,若斜面足够大,试分析质点最终的运动状态和运动轨迹是怎样的?

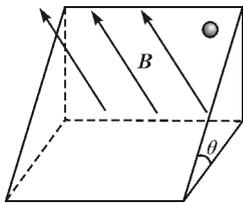


图1 质点初始位置图

2 最大速度的分析

如图2所示,以质点释放位置为坐标原点,水平

向右为 x 轴,沿斜面向上为 y 轴,建立平面直角坐标系 xOy .

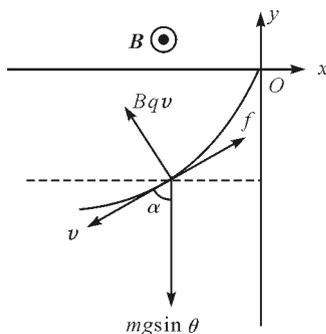


图2 质点受力分析图

设某一时刻质点的速度为 v ,速度方向与 y 轴负方向的夹角为 α ,质点此时做曲线运动的曲率半径为 ρ ,则在法向由牛顿运动第二定律得

$$Bqv - mg \sin \theta \sin \alpha = m \frac{v^2}{\rho} \quad (1)$$

由于带电质点的速率为

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (ds \text{ 为弧长微元,下同}) \quad (2)$$

轨迹的曲率半径为

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} \quad (3)$$

把式(2)、(3)代入式(1)得

$$Bqv - mg \sin \theta \sin \alpha = m \frac{v}{\rho} v =$$

* 湖北省教育学会教师教育专业委员会2020年课题“数值模拟在物理问题研究中应用研究”阶段性成果之一,课题编号:HBJSJY2020-

$$mv \frac{ds}{dt} \frac{d\alpha}{ds} = mv \frac{d\alpha}{dt} \quad (4)$$

整理后得

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{Bq}{m} - \frac{g \sin \theta \sin \alpha}{v} \quad (5)$$

随着时间推移,式(5)会趋近于零,角 α 趋于常量,质点达到匀速直线运动状态,则有

$$Bqv = mg \sin \theta \sin \alpha \quad (6)$$

$$(mg \sin \theta)^2 = (Bqv)^2 + (\mu mg \cos \theta)^2 \quad (7)$$

联立式(6)、(7)可求得

$$v = \frac{mg}{Bq} \sqrt{\sin^2 \theta - (\mu \cos \theta)^2} \quad (8)$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - (\mu \cot \theta)^2} \quad (9)$$

带电质点在切向由牛顿运动第二定律得

$$mg \sin \theta \cos \alpha - \mu mg \cos \theta = m \frac{dv}{dt} \quad (10)$$

将式(10)两边同乘以 $d\alpha$ 则有

$$(mg \sin \theta \cos \alpha - \mu mg \cos \theta) d\alpha = m \frac{dv}{dt} d\alpha \quad (11)$$

将式(5)代入式(11)得

$$(mg \sin \theta \cos \alpha - \mu mg \cos \theta) d\alpha = m \frac{dv}{dt} d\alpha = m \left(\frac{Bq}{m} - \frac{g \sin \theta \sin \alpha}{v} \right) dv \quad (12)$$

将式(12)整理后得

$$\frac{dv}{d\alpha} = \frac{g \sin \theta \cos \alpha - \mu g \cos \theta}{\frac{Bq}{m} - \frac{g \sin \theta \sin \alpha}{v}} = \frac{\cos \alpha - \mu \cot \theta}{\frac{Bq}{mg \sin \theta} - \frac{\sin \alpha}{v}} \quad (13)$$

进一步研究发现,式(13)没有解析解.

3 动力学微分方程组

由图2中质点受力分析图,可以写出质点动力学微分方程组如下

$$m \ddot{x} = \mu mg \cos \theta \left[-\frac{\dot{x}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}} \right] + Bq \dot{y} \quad (14)$$

$$m \ddot{y} = \mu mg \cos \theta \left[-\frac{\dot{y}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}} \right] - Bq \dot{x} - mg \sin \theta \quad (15)$$

$$x(0) = 0, y(0) = 0, x'(0) = y'(0) = 0 \quad (16)$$

进一步研究发现,式(14)、(15)、(16)没有解析解.

4 数值模拟

若取 $m = 1 \text{ kg}$, $B = 0.5 \text{ T}$, $q = 1 \text{ C}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\mu = 0.1$, $g = 10 \text{ m/s}^2$,数值模拟解如下:

由式(8)得

$$v = \frac{mg}{Bq} \sqrt{(\sin \theta)^2 - (\mu \cos \theta)^2} \approx 17.292 \text{ m/s} \quad (17)$$

由式(9)得

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - (\mu \cot \theta)^2} \quad (18)$$

代值求得

$$\alpha = \arccos(\mu \cot \theta) \approx 1.513 \text{ rad} \quad (19)$$

图3是质点运动轨迹图,可以看出质点振动的幅度越来越小,最终趋近于直线运动,不是圆的渐开线运动;图4是质点速率与夹角 α 关系图,可以发现质点最终速率趋近于一个定值,速度的方向趋近于不变.

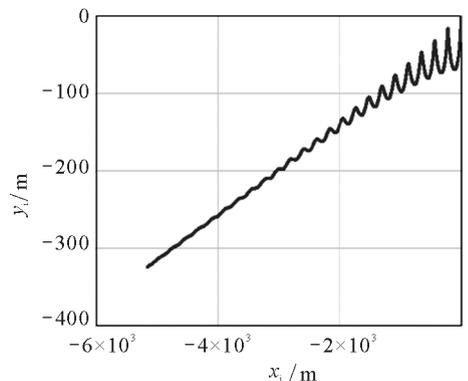


图3 质点运动轨迹图

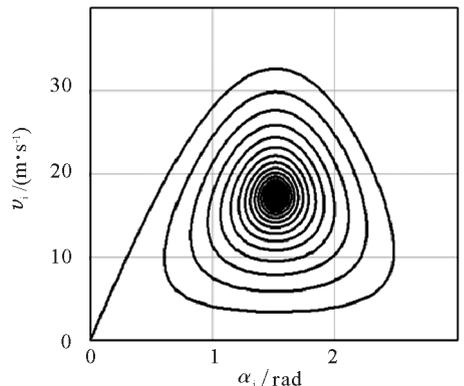


图4 质点速率与夹角 α 关系图

图5是质点两个分速度与时间关系图,可以看

出它们的振幅越来越小,最终都趋近于匀速直线运动,图6是质点速率与时间关系图,可以看出质点最

终速率趋近于某一值。

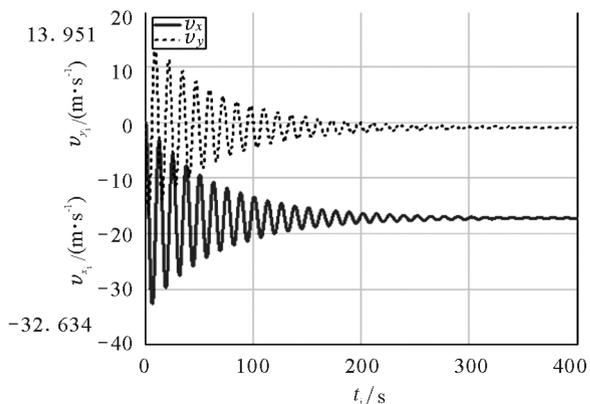


图5 质点两个分速度与时间关系图

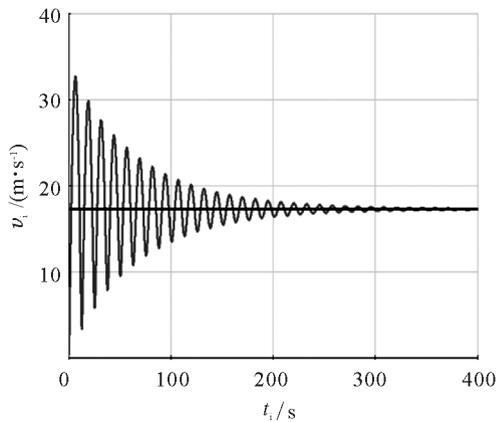


图6 质点速率与时间关系图

5 结论

通过以上分析不难发现,带电质点运动轨迹最终趋近于匀速直线运动,质点在 x 轴和 y 轴方向上的分速度最终都趋近于定值,都是趋近于匀速直线运动,而不是圆的渐开线运动。进一步研究还发现:若 $\mu=0$ 时,带电质点的运动轨迹是一条摆线^[2,3],感兴趣的教师可以自行推证,这里不再赘述。

参考文献

- 1 张璋,张引红. 匀强磁场中不同受力下带电粒子的运动轨迹[J]. 物理教学,2017(6):63 ~ 65
- 2 许晓林. 带电粒子在匀强磁场中的运动[J]. 物理教学,2010(1):51
- 3 杨海荣,葛更丰. 再说带电粒子在磁场中的运动[J]. 物理教学,2011(5):43

(上接第 141 页)

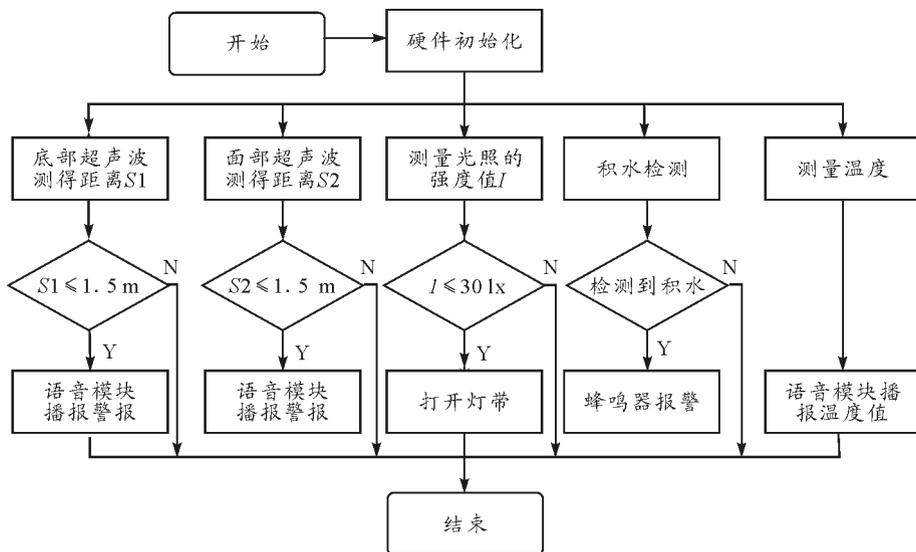


图3 系统的软件程序流程图

参考文献

- 1 毛达许,程海玉. 基于超声波的盲人导盲系统的设计[J]. 科技世界,2015(18):131
- 2 张仁朝,王高原,罗政杰. 基于单片机控制的智能导盲杖设计[J]. 电子制作,2019(21):31 ~ 33
- 3 张昂,黄立勤. 基于机器视觉的导盲杖辅助识别系统设计[J]. 贵州大学学报(自然科学版),2019,36(6):63 ~ 67