

## 等量异号双环电荷在轴线上产生匀强电场条件的研究\*

周群益

(广州理工学院通识教育学院 广东 广州 510540)

莫云飞

(长沙学院电子信息与电气工程学院 湖南 长沙 410022)

侯兆阳

(长安大学理学院 陕西 西安 710064)

周丽丽

(赣南医学院医学信息工程学院 江西 赣州 341000)

(收稿日期:2021-01-19)

**摘要:**与亥姆霍兹线圈产生的匀强磁场类似,等量异号共轴双环电荷在一定的条件下也能在轴线上产生匀强电场,这种双环称为临界双环或亥姆霍兹双环.文中建立了双环电荷在直角坐标系中的轴线上产生电场强度的表达式,求出临界距离,计算临界场强,绘制了双环电荷的电场强度变化规律曲线.

**关键词:**双环电荷 电场强度 临界距离 临界双环

## 1 引言

两个半径和电流大小方向都相同的共轴通电线圈的距离等于半径时,中间部分接近于匀强磁场,这种线圈称为亥姆霍兹线圈<sup>[1~3]</sup>.两个大小相同的共轴圆环带有等量异号电荷时,简称为带电双环.当双环很近时,在远处产生的电场等效于一个电偶极子产生的电场<sup>[4]</sup>.与亥姆霍兹线圈类似,当两环之间的距离等于某一临界距离时,两环之间的电场接近于匀强电场.文中说明了双环之间的场强随距离变化的规律,求出了临界距离和临界电场.

## 2 轴线上的电场随距离的变化

如图1所示,取 $z$ 轴为两环共轴,原点取在两环正中间.设两个圆环的半径为 $a$ ,距离为 $2L$ ,均匀带有等量异号电荷 $\pm Q$ .

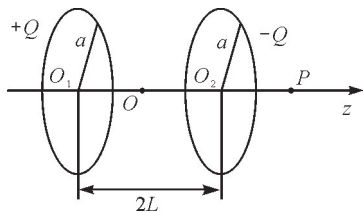


图1 等量异号共轴双环电荷的场强

当均匀正负圆环电荷中心位于原点时,在轴线上产生的场强为<sup>[2~4]</sup>

$$E_{\pm}(z) = \frac{\pm kQz}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

场强和距离无量纲化处理后关系如图2所示,带正电荷的圆环在轴线上产生的场强用先负后正的虚线表示,带负电荷的圆环在轴线上产生的场强用先正后负的点虚线表示,当两环重合时, $L=0$ ,合场强为零用实线表示.

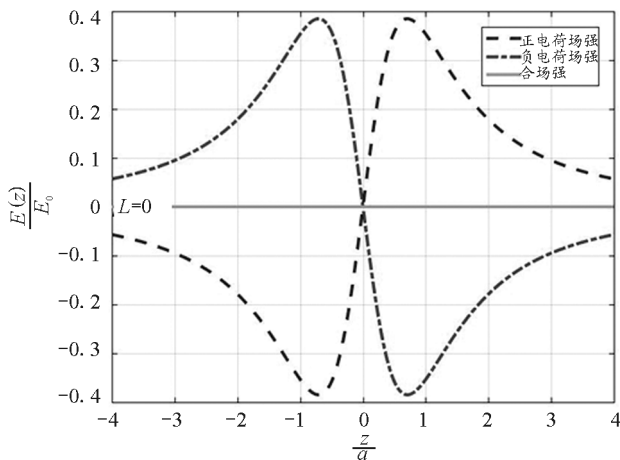


图2 双环电荷轴线上的电场强度( $L=0$ )

\* 广东省高校科研特色创新项目,项目编号:2020KTSCX209;国家自然科学基金,项目编号:12004053

作者简介:周群益(1955-),男,副教授,主要从事凝聚态物理研究.

通讯作者:莫云飞(1985-),男,博士,讲师,主要从事大学物理教学研究.

两条曲线都有一个“峰”， $E_{\pm}(z)$ 对 $z$ 求导数，可得

$$\frac{dE_{\pm}(z)}{dz} = \frac{\pm kQ(a^2 - 2z^2)}{(a^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (2)$$

令 $\frac{dE_{\pm}}{dz} = 0$ ，可得峰值对应的坐标

$$z_M = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}a = \pm 0.70711a \quad (3)$$

如图3所示，正电荷向左，负电荷向右拉开双环，当 $L = 0.1a$ 时，原点处的合场强形成一个“峰”，称为“主峰”。“主峰”附近的电场并不均匀。

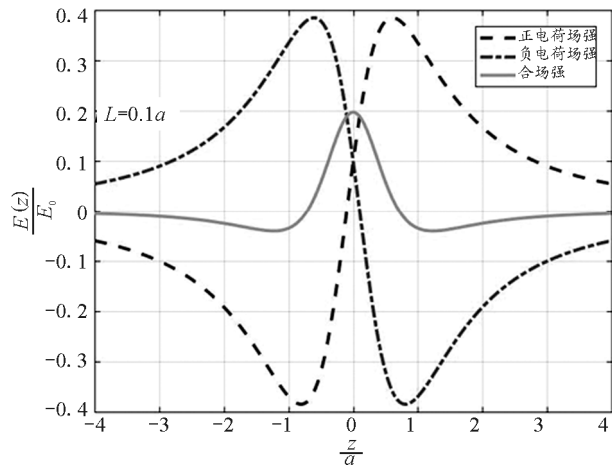


图3 双环电荷轴线上的电场强度( $L = 0.1a$ )

继续拉开双环，“主峰”不断长高。如图4所示，当 $L = 0.70711a$ 时，两个环的“峰”重叠，合场强的“主峰”达到最高。

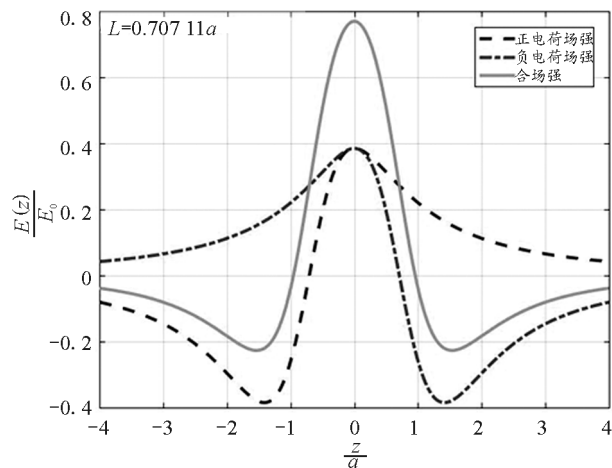


图4 双环电荷轴线上的电场强度( $L = 0.70711a$ )

继续拉开双环，“主峰”不断降低。如图5所示，当 $L = a$ 时，两个环的“峰”错开，“主峰”降低一些。

继续拉开双环，“主峰”将分裂为两个对称的“次峰”。如图6所示，当 $L = 2a$ 时，“主峰”变成了“主谷”。“主谷”附近的电场也不太均匀。

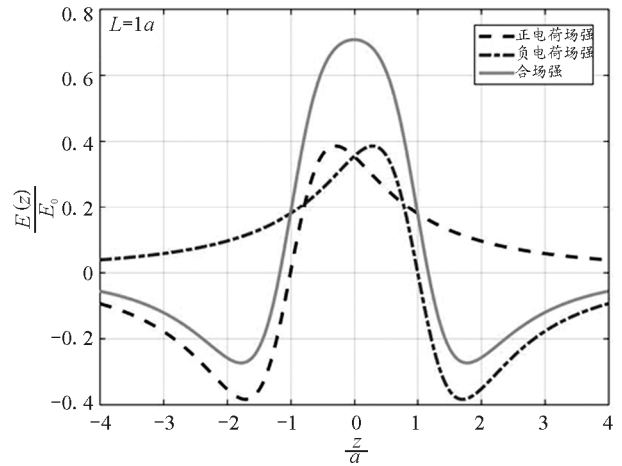


图5 双环电荷轴线上的电场强度( $L = a$ )

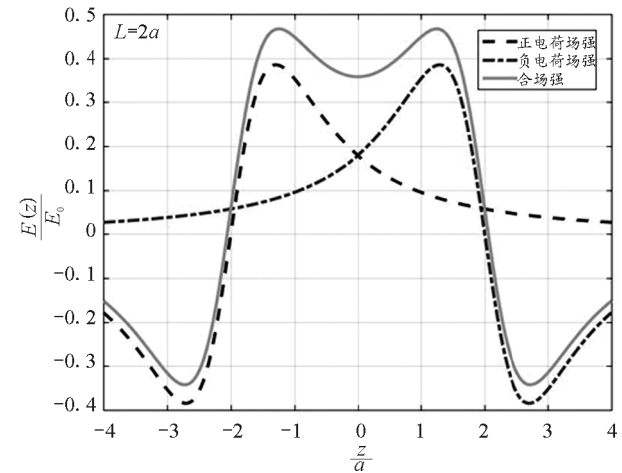


图6 双环电荷轴线上的电场强度( $L = 2a$ )

### 3 轴线上的临界距离和临界电场

在“主谷”的两侧各有一个对称的拐点。如果减少双环之间的距离，两个拐点将向中垂线靠拢。当两个拐点恰好在中垂线重合时，“主谷”消失，两个“次峰”就合并为一个“平峰”，这个距离是临界距离。

在图1中，左环正电荷在场点轴线点 $P$ 处产生的电场强度为

$$E_1(z) = \frac{kQ(z+L)}{[(z+L)^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

右环负电荷在轴线上场点 $P$ 处产生的电场强度为

$$E_2(z) = \frac{-kQ(z-L)}{[(z-L)^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (5)$$

合场强为

$$E(z) = E_1(z) + E_2(z) = \frac{kQ(z+L)}{[(z+L)^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{kQ(z-L)}{[(z-L)^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (6)$$

$L$  是两环之间的半距离, 是决定场强分布规律的参数. 将  $E(z)$  对  $z$  求导数得

$$\frac{dE(z)}{dz} = kQ \frac{a^2 - 2(z+L)^2}{[a^2 + (z+L)^2]^{\frac{5}{2}}} - kQ \frac{a^2 - 2(z-L)^2}{[a^2 + (z-L)^2]^{\frac{5}{2}}} \quad (7)$$

二阶导数为

$$\frac{d^2E(z)}{dz^2} = -3kQ(z+L) \frac{3a^2 - 2(z+L)^2}{[a^2 + (z+L)^2]^{\frac{7}{2}}} + 3kQ(z-L) \frac{3a^2 - 2(z-L)^2}{[a^2 + (z-L)^2]^{\frac{7}{2}}} \quad (8)$$

在拐点处有  $\frac{d^2E}{dz^2} = 0$ , 当拐点位于原点时, 必有  $z = 0$ . 由上式可得方程

$$3a^2 - 2L_c^2 = 0$$

解得

$$L_c = \frac{\sqrt{6}}{2}a = 1.2247a \quad (9)$$

$2L_c$  是两环之间的临界距离,  $L_c$  就是临界半距. 这种双环称为临界双环或亥姆霍兹双环. 临界双环在  $z = 0$  处的临界场强为

$$E_c = \frac{kQL_c}{(L_c^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{kQ(-L_c)}{(L_c^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{5} \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{kQ}{a^2} = 0.61968E_0 \quad (10)$$

其中,  $E_0 = \frac{kQ}{a^2}$ , 是点电荷  $Q$  在距离为  $a$  处产生的电场强度的大小.

临界双环的电场强度如图 7 所示, 在原点附近电场比较均匀.

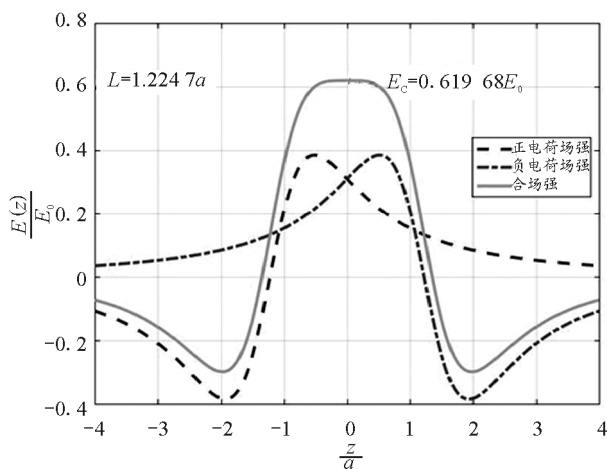


图7 临界双环轴线上的电场强度( $L = L_c$ )

#### 4 公式的无量纲化和 MATLAB 程序

取半径  $a$  为长度单位, 则无量纲的坐标和距离为

$$x^* = \frac{x}{a} \quad z^* = \frac{z}{a} \quad L^* = \frac{L}{a} \quad (11)$$

取  $E_0 = \frac{kQ}{a^2}$  为电场强度单位, 则无量纲的电场强度为

$$E^* = \frac{E}{E_0} = \frac{z^* + L^*}{[(z^* + L^*)^2 + 1]^{\frac{3}{2}}} - \frac{z^* - L^*}{[(z^* - L^*)^2 + 1]^{\frac{3}{2}}} \quad (12)$$

其中,  $L^*$  是可调节的参数. 当  $L^* = \frac{\sqrt{6}}{2}$  时, 双环就是临界双环或亥姆霍兹双环.

MATLAB 的计算功能和图形功能都很强, 根据公式可设计一个简短的程序, 完成各种曲线的计算和绘制(见附录).

#### 5 结束语

静电学和恒磁学往往有一些相似的问题. 既然亥姆霍兹线圈可以在轴线上产生均匀磁场, 也应该存在“亥姆霍兹双环”在轴线上产生均匀电场. 这是一种十分有趣的联想. 利用亥姆霍兹线圈磁场的求法, 即可求得临界双环的电场.

利用 MATLAB 能够简单地求出临界距离, 还可以将双环电荷所形成的电场随距离的变化过程用动画演示出来.

#### 参考文献

- 1 赵凯华, 陈熙谋. 电磁学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003. 98 ~ 99
- 2 吴百诗. 大学物理新版(上册)[M]. 北京: 科学出版社, 2006. 368 ~ 369, 289 ~ 230
- 3 周群益. MATLAB可视化大学物理学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2011. 381 ~ 384, 340 ~ 341
- 4 张之翔. 电磁学千题解(第3版)[M]. 北京: 科学出版社, 2018. 137 ~ 138, 134 ~ 135

## 附录

```

ring2E1.m
% 等量异号共轴双环电荷轴线上的电场强度
clear,syms z L positive% 清除变量,定义正的符号变量(变量 L 代表比值 L/a)
E1 = (z + L)/(1 + (z + L)^2)^(3/2),E2 = -(z - L)/(1 + (z - L)^2)^(3/2)% 正,负电荷场强
dE2 = diff(E1 + E2,2),f = subs(dE2,z,0)% 求总电场强度的二阶导数,变量替换成 0
Lc = solve(f,L),lc = double(Lc)% 求半长与半径之比的符号解,取数值
f1 = inline(E1);f2 = inline(E2);% 内联函数
l = [0,0.1,sqrt(2)/2,1,2,lc];fs = 16;% 半距离向量,字体大小
zm = 4;z = -zm:0.01:zm;% 最大自变量,自变量向量
for i = 1:length(l),L = l(i);% 按半距循环,取半距
    e1 = f1(l(i),z);e2 = f2(l(i),z);% 正负电荷电场强度向量
    m = max(e1 + e2);figure% 求最大值,创建图形窗口
    plot(z,e1,'—',z,e2,'-.',z,e1 + e2,'LineWidth',2)% 画曲线
    text(-zm,m,['\itL\rm =',num2str(L),'\ita'],FontSize',fs)% 显示距离
xlabel('\itz/a',FontSize',fs)% 标记横坐标
ylabel('\itE\rm(\itz\rm)/\itE\rm_0',FontSize',fs)% 标记纵坐标
    title('等量异号共轴双环电荷在轴线上的电场强度',FontSize',fs)% 显示标题
    legend('正电荷场强','负电荷场强','合场强'),grid on% 图例,加网格
end% 结束循环
text(0,m,['\itE\rm_C =',num2str(m),'\itE\rm_0'],FontSize',fs)% 显示临界值

```

## Study on the Condition of Uniform Electric Field Produced by Equal Number of Double Ring Charges of Different Sign Along the Axis

Zhou Qunyi

(College of General Education, Guangzhou Institute of Science and Technology, Guangzhou, Guangdong 510540)

Mo Yunfei

(School of Electronic Information and Electrical Engineering, Changsha University, Changsha, Hunan 410022)

Hou Zhaoyang

(School of Science, Chang'an University, Xi'an, Shannxi 710064)

Zhou Lili

(School of Medical and Information Engineering, Gannan Medical University, Ganzhou, Jiangxi 341000)

**Abstract:** Being similar with the uniform magnetic field produced by Helmholtz coils, uniform electric field can be produced by two coaxial rings with positive and negative charges. This system is called Helmholtz ring. The analytical formulas of its electric field on the axis is derived, and the critical distance between the two rings is obtained where the electric field is nearly uniform. Moreover, the change feature of electric field for the Helmholtz ring is visualized by means of Matlab.

**Key words:** two coaxial rings; electric field; critical distance; critical bicycles