磁场中变力冲量问题模型分析*

吴广国　张　伟
（北京景山学校　北京　100006）
朱　睿
（北京景山学校京西实验学校　北京　102300）
邹　斌
（中央民族大学理学院　北京　100081）

（收稿日期：2021-01-20）

摘　要：文章借助动量定理处理带电粒子、导体棒、导线框在电磁复合场中非匀速运动，采用微分求和的数学思想，简化问题计算，从而得到物体的速度、位移或电荷量等信息．

关键词：洛伦兹力　安培力　动量定理　变力

带电粒子在磁场中所受洛伦兹力，随速度大小和方向的变化而变化．安培力作为洛伦兹力的宏观表现也会随导体棒中自由电荷定向移动的速度而变化．在电磁感应现象中，涉及导体棒的运动通常为非匀变速运动，在求解与之相关的焦耳热、电荷量、位移、速度、加速度、时间等物理量的时候，如果从动力学角度来分析将会陷入困境[1~3]．动量定理作为普遍适用的基本物理规律之一，对于处理非匀变速运动涉及的问题会有很好的效果．借助动量定理充分利用电流强度、速度等概念的定义，再利用微分求和的思想，使得上述问题得以顺利解决．

1　带电粒子在电磁复合场中运动模型

【例 1】平行板间的电磁场如图 1 所示，电场强度竖直向下，大小为 E，磁感应强度垂直纸面向里，大小为 B．某质量为 m，电荷量为 q 的正电荷从上极板某边沿处静止释放，带电粒子在电磁场的共同作用下，恰好能到达下极板．求粒子到达下极板时的速度大小 v，以及两极板间的距离 d．（不计粒子重力）

解析：设带电粒子从 O 点释放，到达最低点为 P 点，以 O 点为坐标原点，建立如图 1 所示的平面直角坐标系 xOy，设任意时刻带电粒子的两个方向的分速度分别为 v_x 和 v_y，任意 Δt 时间内，据动量定理在水平方向

$$qv_yB\Delta t=m\Delta v_x$$

即

$$qB\Delta y=m\Delta v_x$$

求和

$$qB\sum\Delta y=m\sum\Delta v_x$$

即

$$qBd=mv \tag{1}$$

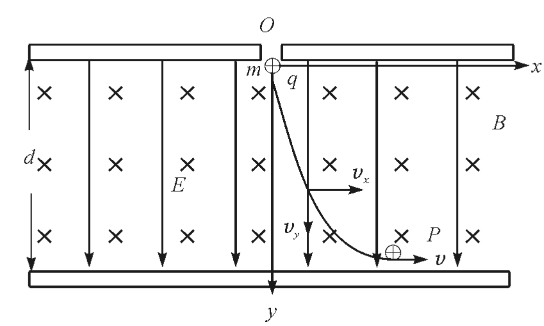

图 1　带电粒子在电磁复合场中的运动

因洛伦兹力不做功，只有电场力做功，从释放点到最低点间，由动能定理

$$Eqd=\frac{1}{2}mv^2 \tag{2}$$

解得

* 北京市教育科学“十三五”规划 2018 年度一般课题“中学物理创新性自制实验与实验教学模式探索”的阶段性成果，课题批准号：CDDB18169

通讯作者：邹斌（1980－　），男，博士，副教授，研究方向为物理教育．

$$v = 2\frac{E}{B} \qquad d = 2\frac{mE}{qB^2}$$

点评：本题中带电粒子受到一个恒定的沿 $+y$ 方向的电场力，带电粒子静止释放后，在电场力的作用下加速，同时受到一个垂直于速度方向的洛伦兹力，且洛伦兹力的大小正比于速度大小．竖直方向的速度对应的水平方向的洛伦兹力从而产生水平方向的加速度，该加速度的时间积累产生水平方向的速度．这里充分利用了 $v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$，$y$ 方向速度的时间积累为该方向的位移 d．带电粒子既不是匀变速直线运动，也不是匀速圆周运动，更不是匀变速曲线运动，实际运动情况为匀速直线运动与匀速圆周运动的叠加．

实际上，可以施加带电粒子分别沿 $+x$ 和 $-x$ 方向的初速度 v_0，使得 $qv_0B = Eq$，即 $v_0 = \frac{E}{B}$，使 $+x$ 方向的速度 v_0 所对应的洛伦兹力与恒力 Eq 平衡，后续将无需再分析电场力，相当于该带电粒子以 $-x$ 方向的初速度 v_0 进入匀强磁场，而做半径为 R 的匀速圆周运动，如图 2 所示．该带电粒子除了做匀速圆周运动外，还同时沿 x 轴正方向做匀速直线运动，因此，该粒子的运动为该匀速圆周运动与匀速直线运动的合运动．因此 $d = 2R = 2\frac{mE}{qB^2}$，而带电粒子到达最低点时，其速度为匀速圆周运动速度和匀速直线运动速度之和，即 $v = 2v_0 = \frac{2E}{B}$．

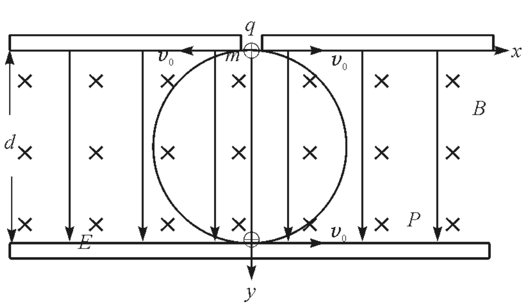

图 2　带电粒子在复合场中运动的分解

2　导体棒仅在安培力作用下减速运动模型

【例 2】如图 3 所示，水平光滑足够长的金属平行导轨 MN 和 PQ，导轨左端与一定值电阻 R 相连，垂直导轨放置阻值为 r，质量为 m 的导体棒 ab，导体棒长度与导轨间距相同，均为 l．现给导体棒水平向右的初速度 v_0，以该时刻计时 $t=0$ 且导体棒所在的位置为坐标原点建立坐标轴 Ox 轴，求：

(1) 定性分析导体的运动状态；

(2) 导体棒从 v_0 到稳定状态整个过程通过 R 的电荷量；

(3) 导体棒从 v_0 到稳定状态过程中发生的位移．

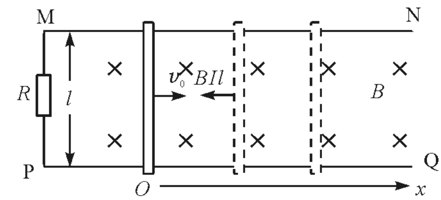

图 3　水平光滑导轨导体棒仅受安培力作用下运动模型

解析：(1) 设任意时刻导体棒速度为 v，由动生电动势 $\varepsilon = Blv$，则回路中电流

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} = \frac{Blv}{R+r}$$

导体棒所受安培力为

$$F = BIl = B\frac{\varepsilon}{R+r}l = \frac{B^2l^2v}{R+r}$$

由表达式可知导体棒所受安培力大小正比于导体棒速度大小，因为导体棒只受安培力，且安培力方向与速度方向相反，因此，导体棒做加速度逐渐减小的减速运动．导轨足够长，最终导体棒将停在导轨上．

(2) **方法一**：欲求整个过程所通过的电荷量，由于导体棒做加速度减小的减速运动，所以产生的电动势逐渐减小，从而电流是逐渐减小的，设任意时刻的回路电流为 I，根据动量定理安培力冲量 $-BIl\Delta t = m\Delta v$，代入电流的定义式 $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ 有

$$-Bl\Delta q = m\Delta v$$

求和得

$$-Bl\sum\Delta q = m\sum\Delta v$$

即

$$-BlQ = m(0 - v_0)$$

$$Q = \frac{mv_0}{Bl}$$

方法二：任意时刻的电流取决于该时刻的感应电动势，而感应电动势为该时刻的磁通量的变化率 $\varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$，所以求电荷量可以用电流对时间的平均值．根据 $\bar{I} = \frac{Q}{\Delta t}$，得

$$Q=\bar{I}\Delta t=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t(R+r)}\Delta t=\frac{\Delta\Phi}{R+r}$$

(3) **方法一**:因导体棒做加速度逐渐减小的减速运动,其运动规律不在我们中学研究范围之内,位移的求解不能采用一般的方法.可以采取第(2)问中求解电荷量的两种方法结合,即

$$Q=\frac{mv_0}{Bl}=\frac{\Delta\Phi}{R+r}=\frac{Blx}{R+r}$$

所以

$$x=\frac{mv_0(R+r)}{B^2l^2}$$

方法二:该小问也可以直接采用安培力的动量定理来解决

设导体棒在任一时刻的速度为 v,则

$$\varepsilon=Blv \qquad I=\frac{\varepsilon}{R+r}$$

由动量定理导体棒所受安培力的冲量

$$-BIl\Delta t=m\Delta v$$

综合以上 3 式,可得

$$-\frac{B^2l^2}{R+r}v\Delta t=m\Delta v$$

利用 $v=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$,即

$$-\frac{B^2l^2}{R+r}\Delta x=m\Delta v$$

对上式求和

$$-\frac{B^2l^2}{R+r}\sum\Delta x=m\sum\Delta v$$

即

$$\frac{B^2l^2}{R+r}x=mv_0$$

也可求得导体棒从 v_0 到停止运动发生的位移

$$x=\frac{mv_0(R+r)}{B^2l^2}$$

点评:这道题充分利用了电流强度、速度在时间上的积累分别为电荷量和位移.求电荷量和导体棒的位移时,都利用导体棒所受安培力的动量定理,但求电荷量时安培力的表达式用 BIl,而在求导体棒位移时,安培力的表达式用 $B\dfrac{Blv}{R+r}l$,才能在后续对时间求和时,相应地出现电荷量 Q 和位移 x.

导体棒真正的运动规律是可以通过高等数学求解的,由动量定理

$$-\frac{B^2l^2}{R+r}v\,\mathrm{d}t=m\,\mathrm{d}v$$

$$-\frac{B^2l^2}{m(R+r)}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}v}{v}$$

解该微分方程并利用初始条件 $t=0$ 时,$v=v_0$ 得

$$v(t)=v_0\mathrm{e}^{-\frac{B^2l^2}{m(R+r)}t}$$

所以,求电荷量

$$Q=\int_0^\infty\frac{Blv(t)}{R+r}\mathrm{d}t=\int_0^\infty\frac{Blv_0}{R+r}\mathrm{e}^{-\frac{B^2l^2}{m(R+r)}t}\mathrm{d}t=\frac{mv_0}{Bl}$$

导体棒位移

$$x=\int_0^\infty v(t)\mathrm{d}t=\int_0^\infty v_0\mathrm{e}^{-\frac{B^2l^2}{m(R+r)}t}\mathrm{d}t=\frac{mv_0(R+r)}{B^2l^2}$$

本题充分考查了速度和电流两个物理量的定义,在对这两个概念的深度理解的基础上,同时熟练应用动量定理,成功绕开了高等数学知识,使问题得以顺利解决.

3　电容放电的电磁炮模型

【例 3】水平放置一光滑平行金属导轨,导轨间距为 l,导轨电阻不计且足够长.一质量为 m,电阻为 r 的导体棒垂直导轨放置,电路图如图 4 所示.电源电动势为 ε,现将开关接到 a 处给电容器充电,电容器的电容值为 C,经过足够长时间电容器充满电后,将单刀双掷开关拨到 b 处,电容器经过导体棒形成回路进行放电,导体棒在安培力作用下向右加速运动,试求

(1) 导体棒最终稳定状态下的速度 v.

(2) 放电过程中导体棒产生的焦耳热 Q.

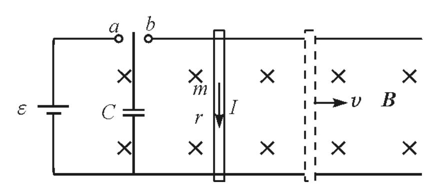

图 4　电容器放电的电磁炮模型

解析:电容器充满电所带电荷量 $Q_C=C\varepsilon$,放电过程导体棒中的电流如图 4 所示,在安培力的作用下导体棒沿导轨向右加速运动,导体棒获得速度后,切割磁感线产生动生反电动势 ε'[4],当反电动势小于此时电容器两端的电压时,继续放电导体棒加速,但加速度减小.导体棒做加速度逐渐减小的加速运动,最终导体棒做匀速直线运动.

设任意时刻导体棒的速度为 $v(t)$,导体棒运动的加速度大小为 $a(t)$,电容器两极板间此时电压为 $U(t)$

$$\varepsilon'=Blv(t) \qquad I=\frac{U_C(t)-Blv(t)}{r}$$

$$BIl = ma$$

综上,可求得

$$a = B\frac{U_C(t) - Blv(t)}{mr}l$$

最终稳定运动时,导体棒加速度为零

$$U = Blv$$

由动量定理

$$BIl\Delta t = m\Delta v$$

即

$$Bl\Delta q = m\Delta v$$

求和

$$Bl\sum\Delta q = m\sum\Delta v$$

即 $$Blq = mv$$

解得 $$q = \frac{mv}{Bl}$$

q 为电容器通过导体棒形成回路释放的电荷量.

$$Q_C - CU = q$$

即 $$C(\varepsilon - Blv) = \frac{mv}{Bl}$$

可求得

$$v = \frac{BlC\varepsilon}{m + B^2l^2C}$$

由能量守恒定律

$$\frac{1}{2}C(\varepsilon^2 - B^2l^2v^2) = Q + \frac{1}{2}mv^2$$

则在这个过程中导体棒上产生的焦耳热

$$Q = \frac{mC\varepsilon^2}{2(m + B^2l^2C)}$$

拓展:任意时刻电容器所带电荷量为 $q(t)$,此时导体棒速度为 $v(t)$,由以上讨论可得

$$Bl[C\varepsilon - q(t)] = mv(t)$$

化简得

$$v(t) = \frac{Bl[C\varepsilon - q(t)]}{m} \qquad \mathrm{d}v = -\frac{Bl}{m}\mathrm{d}q$$

对导体棒应用动量定理

$$B\frac{U(t) - Blv}{r}l\,\mathrm{d}t = m\mathrm{d}v$$

分离变量后,可得

$$\frac{\mathrm{d}q}{(B^2l^2C + m)q - B^2l^2C^2\varepsilon} = -\frac{\mathrm{d}t}{mrC}$$

积分并由初始条件可得

$$q(t) = \frac{B^2l^2C^2\varepsilon + C\varepsilon m\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{B^2l^2C+m}{mrC}\right)t}}{B^2l^2C + m}$$

可检验,当 $t = 0$ 时

$$q(t)\big|_{t=0} = C\varepsilon$$

$$t \to \infty, q(t)\big|_{t\to\infty} = \frac{B^2l^2C^2\varepsilon}{B^2l^2C + m}.$$

点评:该导体棒在安培力作用下做加速度逐渐减小的加速运动,直至导体棒匀速直线运动,在这个过程中,安培力做正功,消耗电容器存储的电能,转化为导体棒的动能与回路中焦耳热.这个过程中充分利用了动量定理、能量守恒定律两个基本物理规律以及有关电流的定义等基本知识,巧妙地解得导体棒最终的速度和过程中产生的焦耳热.

如果该模型中的电容放电改为直接由直流电源 E 供电,导体棒在安培力的作用下加速运动起来,最终导体棒的稳定运动状态为导体棒动生电动势大小等于直流电源电动势 E,这样回路中电流为零,导体棒所受合外力为零,达到稳定状态.

4 导线框穿过匀强磁场区域运动模型

【例 4】(2020 年 11 月清华大学举办中学生标准学术能力诊断性测试第 5 题)光滑、绝缘水平桌面上有一竖直条形匀强磁场区,正方形金属线圈以某一初速度进入磁场区,因安培力作用未能穿出磁场区,线圈停止时仍有一半面积在磁场中(线圈的边长小于磁场区的宽度).则线圈进入和离开磁场过程中产生的热量比为( )

A. 2∶1 B. 3∶1 C. 4∶1 D. 8∶1

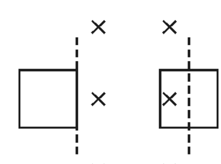

图 5 金属线框穿越磁场过程的动能、能量问题模型

解析:方法一,金属线框只有在进入磁场和出磁场的过程中有感应电流,因是光滑、绝缘的水平面,所以线圈在进出磁场时,只在安培力的作用下减速运动,设正方形金属线框边长为 l.

由动量定理得

$$BIl\Delta t = m\Delta v, 即\ Bl\Delta q = m\Delta v$$

对金属线框进入磁场过程求和

$$Bl\sum\Delta q = m\sum\Delta v$$

即 $$BlQ_{入} = m(v_2 - v_1) \tag{3}$$

在金属线框进入磁场过程中,$\varepsilon = Blv$,$I = \frac{\varepsilon}{R}$,由动量定理

$$BIl\Delta t = m\Delta v$$

利用 $v\Delta t = \Delta x$,联立以上各式,可得

$$\frac{B^2 l^2}{R}\Delta x = m(v_2 - v_1) \qquad (4)$$

由式(3)和式(4)得

$$Q_{入} = \frac{Bl\Delta x}{R} = \frac{Bl^2}{R}$$

因为金属线框出磁场时,有一半面积仍在磁场中就减速为零,同理得

$$Q_{出} = \frac{Bl\Delta x'}{R} = \frac{Bl^2}{2R} \qquad Q_{入} = 2Q_{出}$$

因此,金属线框在进入磁场过程中速度的减小量等于金属线框出磁场时的速度减小量的两倍.由于金属线框停止时仍有一半面积在磁场中,设导线框完全在磁场中时速度为 v,则导体框未进入磁场时的速度为 $3v$.

由能量守恒定律可知

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\frac{1}{2}m(3v)^2 - \frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{8}{1}$$

该题选 D.

方法二,如图 6 所示建立坐标轴 Ox 轴,线框右边沿刚进入磁场时,磁场左边界边沿为坐标原点 O,设任意时刻导线框进入磁场过程中的速度为 v,由动量定理得

$$\frac{B^2 l^2 v}{R}\Delta t = m\Delta v$$

即

$$\frac{B^2 l^2}{R}\Delta x = m\Delta v$$

变形可得

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{B^2 l^2}{mR}$$

当线圈完全进入磁场时,线圈匀速直线运动,在线圈出磁场时与进入磁场时具有相同的规律.设线框刚要进入磁场时速度为 v_2,完全进入磁场后速度为 v_1,线圈恰好出来一半时,速度为零.由图 6 可知

$$\frac{v_2 - v_1}{l} = \frac{v_1}{\frac{l}{2}}$$

即

$$v_2 = 3v_1$$

同理可得

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{8}{1}$$

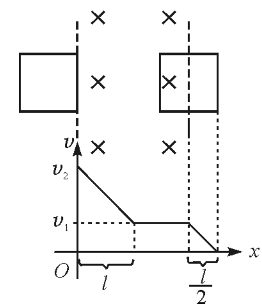

图 6　金属线框穿越磁场过程的 $v-x$ 图像

点评:模型中求通过线圈回路的电荷量,也可以用时间的平均感应电流乘以时间得到.$Q = \frac{\Delta\Phi}{R\Delta t}\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{R}$,而线圈在进入磁场和出磁场的时候,对应的磁通量的变化量为两倍关系,所以通过的电荷量之比也为两倍关系.再结合安培力的动量定理得 $BIl\Delta t = m\Delta v$,即 $Bl\Delta q = m\Delta v$,从而得到速度的关系.

5　导轨双棒运动模型

【**例 5**】如图 7 所示,光滑平行导轨,左侧水平导轨与一倾斜导轨平滑相连,初始导体棒 ab 在高 h 处静止释放,进入处于竖直向上磁感应强度为 B_1 的磁场的水平轨道上,静止于右侧光滑水平轨道上的导体棒 cd 由静止开始向右运动.ab 棒与 cd 棒的长度为 $l_1 = 2l_2 = 2l$,质量均为 m,电阻均为 r.左右两侧水平轨道处的磁感应强度关系为 $B_1 = 2B_2 = 2B$,设左右水平导轨足够长,试求:

(1)最终稳定状态下导体棒 ab 和 cd 的速度 v_1 和 v_2 分别是多少?

(2)两导体棒上产生的焦耳热总共是多少?

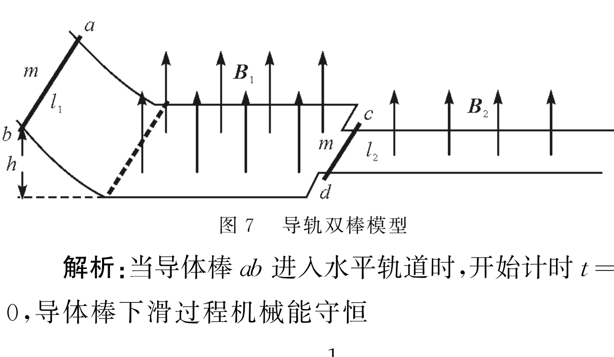

图 7　导轨双棒模型

解析:当导体棒 ab 进入水平轨道时,开始计时 $t = 0$,导体棒下滑过程机械能守恒

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

ab 棒进入磁场后，根据楞次定律，回路中感应电流方向如图 8 所示．ab 在安培力 F_1 作用下减速运动，cd 棒在安培力 F_2 作用下加速运动，最后稳定状态（即两导体棒所受合外力为零）下，回路中无感应电流，即磁通量保持不变．

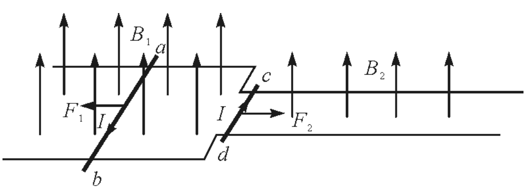

图 8　导轨双棒受力情况

设稳定状态下 ab 和 cd 棒速度分别为 v_{ab} 和 v_{cd}，因为

$$B_1 = 2B_2 = 2B, l_1 = 2l_2 = 2l$$

所以

$$v_{ab} = \frac{1}{4} v_{cd} \tag{5}$$

设任一时刻 t，导体棒中电流为 I，规定受力向右为正方向，如图 8 所示．

$$F_1 = -B_1 I l_1 = -4BIl$$

$$F_2 = B_2 I l_2 = BIl$$

经过一段时间 Δt，对 ab 和 cd 棒应用动量定理

$$F_1 \Delta t = m \Delta v_{ab}$$

即

$$-4BIl\Delta t = m\Delta v_{ab}$$

$F_2 \Delta t = m\Delta v_{cd}$，即 $BIl\Delta t = m\Delta v_{cd}$

从初始时刻 $t=0$ 到最终稳定状态，对整个过程求和

$$-4Bl\boldsymbol{Q}_c = m(v_{ab} - v_0)$$

$$Bl\boldsymbol{Q}_c = m v_{cd}$$

所以

$$v_{ab} - v_0 = -4 v_{cd} \tag{6}$$

由式(1) 和式(2) 可得

$$v_{ab} = \frac{1}{17}\sqrt{2gh}, v_{cd} = \frac{4}{17}\sqrt{2gh}$$

根据能量守恒，在整个过程回路中导体棒上产生的焦耳热为 Q

$$Q = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v_{ab}^2 - \frac{1}{2} m v_{cd}^2 = \frac{16}{17} mgh$$

扩展：任意时刻 cd 棒的速度为 v，对 ab 和 cd 棒应用动量定理可知 ab 棒的速度为 $\sqrt{2gh} - 4v$．

$$I = \frac{2B \times 2l(\sqrt{2gh} - 4v) - Blv}{2r}$$

对 ab 棒应用动量定理

$$BIl\,\mathrm{d}t = m\mathrm{d}v$$

化简得

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{2mB^2 l^2 r} = \int \frac{\mathrm{d}v}{4\sqrt{2gh} - 17v}$$

积分并利用初始条件，得 cd 棒的速度为

$$v_{cd}(t) = \frac{4}{17}\sqrt{2gh}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{17}{2mB^2 l^2 r}t}\right)$$

则 ab 棒的速度为

$$v_{ab}(t) = \frac{\sqrt{2gh}}{17}\left(1 + 16\mathrm{e}^{-\frac{17}{2mB^2 l^2 r}t}\right)$$

点评：该题考查了导轨中双导体棒运动模型，两导体棒所处的平行导轨间距不等，磁感应强度不等，要求最终的稳定状态下回路中无感应电流，即所受合外力为零，导体棒必为匀速直线运动．此时又因为两侧轨道宽度和磁场不同，要求 $\Delta\Phi = 0$，即可得到两导体棒最终的速度之比．再分别应用动量定理，即可解决该变速运动问题．

6　总结

带电粒子在正交的匀强电场和匀强磁场中运动时，其运动情况是复杂的匀速直线运动和匀速圆周运动的叠加，运动形式比较复杂．导体棒在磁场中只受安培力的情况下，导体棒运动情况一般通过牛顿第二定律列微分方程，严格求解微分方程，其速度一般是自然常数 e 为底的指数函数，运动情况更为复杂．而在求解位移和通过导体棒的电荷量等问题时往往需要去计算速度，这导致了求解陷入困境．充分利用某一特定方向对洛伦兹力应用动量定理以及导体棒受安培力时应用动量定理，同时充分利用 $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ 和 $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ 对微元过程求和，即可求出整个过程的速度、位移与电荷量，问题便可迎刃而解．

参考文献

1　马志春，蔡文霞，屈双惠．动量定理在电磁感应问题中的应用[J]．中学物理教学参考，2019(4)：43 ～ 44

2　李元法．动量定理在电磁感应题解中的应用[J]．物理教师，2017(3)：90 ～ 92

3　罗倩敏．电磁感应问题中动量定理应用归类[J]．高中数理化，2020(23)：46 ～ 50

4　吴广国，张思宇，黄球琰，等．电动机中反电动势模型的建立与释疑[J]．物理通报，2018(11)：38 ～ 42