



“摆球推斜面”中两者脱离位置的研究

骆书院 李力 王伟

(重庆市清华中学 重庆 400054)

(收稿日期:2021-01-27)

摘要:文中对“摆球推斜面”模型作了透彻的数理分析,得到球与斜面的脱离位置与二者质量比、初始角度之间的函数关系,通过单调性和渐近行为的研究,得到与初始角度无关的两个结论——“质量比越大则脱离位置越滞后”以及“无论质量比是什么有限值,脱离位置都早于最低点”,澄清了教学中存在的错误,完善了相关文献的不足。

关键词:摆球推斜面 脱离位置 数理分析 单调性 渐近行为

1 问题缘起

“摆球推斜面”模型如下:如图1所示,在光滑水平面上有一质量为 M ,倾角为 θ_0 的斜面,长为 L 的细线悬挂质量为 m 的光滑小球,细线与斜面平行.推力作用在斜面上使整个装置处于静止状态.撤去推力后,小球推动斜面向左运动,问小球和斜面在什么位置脱离?

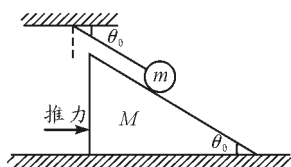


图1 摆球推斜面

教学中通常的看法是:小球在竖直面内做圆周运动的同时推动斜面向左运动,当小球摆到最低点时摆球与斜面脱离。

文献[1]已经指出上述看法是错误的:在斜面倾角为 30° 的情况下,脱离瞬间细线与水平方向的夹角 θ (表示脱离位置)同斜面、小球的质量比 $k = \frac{M}{m}$

有关, k 越大则 θ 越大,而且仅当 $k \rightarrow \infty$ 时 $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$,即

$M \gg m$ 时小球才会在最低点与斜面脱离。

文献[1]对澄清教学中相关错误认识极有教益,但有以下几点不足:第一,未能作彻底的数理解析,虽用两种方法推导,但并未得到最终一致的理论公式,仅从5组赋值计算便草率判断两种方法的结果一致.第二,没有探讨结果与小球初始位置 θ_0 (即

斜面的倾角)的关系.第三,在斜面倾角为 30° 的情况下,仅以5组数据赋值计算形成表格,没有用连续图线完整直观地表示变化趋势^[1,2].

本文将用两种方法对任意斜面倾角 θ_0 [$\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2}]$]时二者的脱离位置作出透彻数理解析,均推出质量比 k 随自变量 θ ($\theta \in [\theta_0, \frac{\pi}{2}]$)和参数 θ_0 变化的函数公式 $k = k(\theta, \theta_0)$,并讨论单调性和渐近行为,然后对不同参数 θ_0 用数学软件绘制函数图像,直观验证单调性和渐近行为,最终认识到两个结论——“ k 越大则 θ 越大”和“无论质量比 k 是什么有限值,脱离位置 θ 都一定小于 $\frac{\pi}{2}$ ”都与初始参数 θ_0 无关。

2 两种推导方法

方法一:如图2所示,设小球与斜面脱离时速度分别为 v_1 和 v_2 ,此时二者间弹力恰为零,小球只受细线拉力 T 和重力 mg ,对小球沿细线方向用牛顿定律有

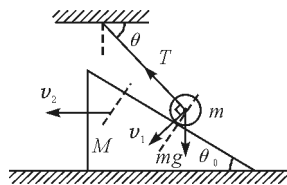


图2 小球受力及运动分析

$$T - mg \sin \theta = \frac{mv_1^2}{L} \quad (1)$$

因为小球与斜面在垂直斜面方向上加速度相

等,脱离瞬间斜面加速度为零,故斜面垂直于斜面方向的加速度也为零,从而小球沿垂直于斜面方向的加速度为零,在此方向上对小球用牛顿定律

$$mg \cos \theta_0 = T \sin(\theta - \theta_0) \quad (2)$$

又脱离时二者沿垂直斜面方向的分速度相等

$$k = \frac{M}{m} = k(\theta, \theta_0) = \frac{2 \sin^2 \theta_0 (\sin \theta - \sin \theta_0) \sin(\theta - \theta_0)}{\cos^2(\theta - \theta_0) [\cos \theta_0 - \sin \theta \sin(\theta - \theta_0)]} - \frac{\sin^2 \theta_0}{\cos^2(\theta - \theta_0)} \quad (5)$$

方法二:脱离前斜面在小球的压力下向左加速,脱

$$v_1 \cos(\theta - \theta_0) = v_2 \sin \theta_0 \quad (3)$$

从初始位置到二者脱离的过程,由系统能量守恒

$$mgL(\sin \theta - \sin \theta_0) = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kmv_2^2 \quad (4)$$

由式(1)~(4),可得斜面与小球的质量比为

$$v_2^2 = \frac{2gL(\sin \theta - \sin \theta_0)}{\frac{\sin^2 \theta_0}{\cos^2(\theta - \theta_0)} + k} \quad (6)$$

当 $\frac{dv_2^2}{d\theta} = 0$ 时 v_2^2 有最大值^[2], 从而 v_2 达到最大值,可得

$$\frac{dv_2^2}{d\theta} = 2gL \frac{\cos \theta \sin^2 \theta_0 \cos^{-2}(\theta - \theta_0) + k \cos \theta - 2 \sin^2 \theta_0 \sin(\theta - \theta_0) \cos^{-3}(\theta - \theta_0)(\sin \theta - \sin \theta_0)}{[\sin^2 \theta_0 \cos^{-2}(\theta - \theta_0) + k]^2} = 0$$

即 $\cos \theta \sin^2 \theta_0 \cos^{-2}(\theta - \theta_0) + k \cos \theta - 2 \sin^2 \theta_0 \sin(\theta - \theta_0) \cos^{-3}(\theta - \theta_0)(\sin \theta - \sin \theta_0) = 0$

移项整理得到

$$k = k(\theta, \theta_0) = \frac{2 \sin^2 \theta_0 (\sin \theta - \sin \theta_0) \sin(\theta - \theta_0)}{\cos^3(\theta - \theta_0) \cos \theta} - \frac{\sin^2 \theta_0}{\cos^2(\theta - \theta_0)} \quad (7)$$

式(5)和式(7)的差异仅在右端第一项分母上,由三角公式 $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ 得到

$$\cos \theta_0 = \cos[\theta - (\theta - \theta_0)] =$$

$$\cos \theta \cos(\theta - \theta_0) + \sin \theta \sin(\theta - \theta_0)$$

移项得

$$\cos \theta_0 - \sin \theta \sin(\theta - \theta_0) = \cos \theta \cos(\theta - \theta_0)$$

代入式(5)即得式(7). 由此可知两种方法得到的函

3 物理意义和结论

由式(5)或式(7)可以看出,小球与斜面的脱离位置 θ 与质量比 k 、初始参数 θ_0 都有关系. 对于给定的初始角 θ_0 , 从式(5)出发考查函数 $k(\theta)$ 的单调性, 将式(5)右端通分可得

$$k = \frac{\sin^2 \theta_0 [2(\sin \theta - \sin \theta_0) \sin(\theta - \theta_0) - \cos \theta_0 + \sin \theta \sin(\theta - \theta_0)]}{\cos^2(\theta - \theta_0) [\cos \theta_0 - \sin \theta \sin(\theta - \theta_0)]} = \frac{\sin^2 \theta_0 [3 \sin \theta \sin(\theta - \theta_0) - 2 \sin \theta_0 \sin(\theta - \theta_0) - \cos \theta_0]}{\cos^2(\theta - \theta_0) [\cos \theta_0 - \sin \theta \sin(\theta - \theta_0)]} = \frac{\sin^2 \theta_0 [(3 \sin \theta - 2 \sin \theta_0) \sin(\theta - \theta_0) - \cos \theta_0]}{\cos^2(\theta - \theta_0) [\cos \theta_0 - \sin \theta \sin(\theta - \theta_0)]} \quad (8)$$

显然式(8)右端分母是 θ 的递减函数,而分子是递增函数,从而分式必然是 θ 的单调递增函数,这说明 θ 越大则 k 越大,于是“无论初始角度 θ_0 怎样, k 越大则 θ 越大”,这符合“越轻的摆球推越重的斜面,二者脱离位置应该滞后”的物理直觉. 自然要问对于任意初始角

θ_0 , 是否也像文献[1]中 $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ 那样,仅当 $k \rightarrow \infty$ 时

$\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, 即 $M \gg m$ 时小球才会在最低点与斜面脱离?

为此我们在式(7)中令 $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 来考查 k 的渐近行为

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} k = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 \theta_0 \sin(\theta - \theta_0) (\sin \theta - \sin \theta_0)}{\cos^3(\theta - \theta_0) \cos \theta} - \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta_0}{\cos^2(\theta - \theta_0)} = \frac{2 \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 (1 - \sin \theta_0)}{\sin^3 \theta_0 \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos \theta} - \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta_0} = \frac{2 \cos \theta_0 (1 - \sin \theta_0)}{\sin \theta_0 \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos \theta} - 1 \rightarrow +\infty \quad (9)$$

(下转第83页)

- 6 李秀燕,陈赐海.无限长均匀带电直线组电场分布的复势解法[J].大学物理,2010,29(1):23~25,30
- 7 谢宁.一维电荷分布系统的电场线[J].大学物理,2007(6):5~10
- 8 戴亮,戴又善.沿直线分布电荷体系电场线的解析解[J].大学物理,2007(7):57~63
- 9 杨宁,梅中磊.几种电力线绘制方法总结[J].电气电子教学学报,2018,40(3):106~108,122
- 10 杜靓.用VB语言模拟静电场中电场线的分布[J].中学物理教学参考,2007(8):31~32
- 11 殷勇,王福谦.二维复杂静电场的电场线方程求解及其数值模拟[J].大学物理,2020,39(7):20~24

Dimension Reduction Mapping of Electric Field and Drawing Method of Electric Field Line

Yue Guolian Huang Shaoshu

(No. 3 Middle School of Liupanshui, Liupanshui, Guizhou 553000)

Abstract: In the plane, the electric field lines drawn according to the electric field line equation of the collinear point charges do not satisfy the basic characteristics of electric field lines. To solve this problem, the author proposes a method to reduce the dimension of the electric field from three-dimensional space to two-dimensional space, and put forward the concept of "mapping electric field", and then drawing the "mapping electric field lines" of collinear or non-collinear point charges in the plane. They fully meet the basic characteristics of electric field lines, and solve the problem of using conventional methods in the plane. Difficulties encountered in drawing electric field lines.

Key words: electrostatic field; electric field lines; mapping electric field; electric field line equation

(上接第 77 页)

这个结果指出:无论质量比 k 为任何有限正值,且无论角度 θ_0 为给定的何值,小球与斜面脱离位置 θ 均达不到 90° ,换句话说文献[1]中“当 $k \rightarrow \infty$ 时 $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$,即 $M \gg m$ 时小球才会在最低点与斜面脱离”的结论与初始角度 θ_0 无关.

最后我们根据式(5),以 θ 为横坐标($\theta \in [\theta_0, \frac{\pi}{2}]$), k 为纵坐标,用 Mathematica 绘制 θ_0 分别取 $10^\circ, 30^\circ, 55^\circ$ 对应的 3 条 $k-\theta$ 图线(为使图像均衡, k 轴已移至 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 处),结果如图 3 所示.图 3 中从左往右依次是 θ_0 取 $10^\circ, 30^\circ, 55^\circ$ 时 k 与 θ 的函数图线.可以看到,对同样质量比而言,脱离角度 θ 随 θ_0 的增大而增大.图线还直观验证了前面得到的两个结论——“质量比 k 越大则脱离位置 θ 越大”以及“无论

质量比 k 是什么有限值,脱离位置 θ 都一定小于 $\frac{\pi}{2}$ ”都与初始参数 θ_0 无关.

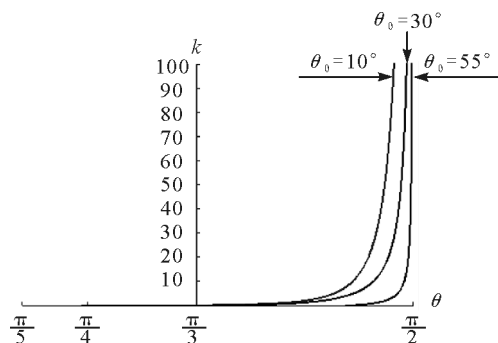


图 3 $k-\theta$ 曲线

参考文献

- 1 陈新华,陶兆宝.充分利用错题资源 探寻物理本质规律[J].物理教学,2019(12):57~59
- 2 菲赫金哥尔茨.微积分学教程(第一卷)(第8版)[M].北京:高等教育出版社,2016.234