最速降线问题的历史与一种巧解

杨亦逸
（上海交通大学科学史与科学文化研究院　上海　200240）

（收稿日期：2021－01－30）

摘　要：对最速降线问题发生的历史进行溯源和探究.从伽利略对该问题进行初步探索开始，简述约翰·伯努利发起公开挑战的过程和原因，介绍其对此问题的巧妙解答，阐述其推动18世纪分析领域发展的历史意义.

关键词：最速降线　伽利略　约翰·伯努利

1　引言

最速降线问题在数学史上是因约翰·伯努利(Johann Bernoulli，1667—1748)向全欧洲的数学家们发出挑战而闻名于世的.在1696年6月的《教师学报》(Acta Eruditorum)上，他以“新问题 —— 向数学家们征解”为题，将问题表述成如下叙述：

“给定垂直面上的两个点A和B，一个质点M受重力作用，从A点开始，在最短的时间内到达B点，曲线AMB会是怎样的？”[1]

他称这条曲线为“最速降线”(拉丁转写brachistochrone，源自于希腊语 βρὰχιστο῾χρὸνο῾)，由希腊语中的“最短”和“时间”两个词合成而来；拉丁语“brachisto”的含义是最短的，“chronos”的含义为时间，因此这一问题字面意义应为求“最短时间”问题.最速降线问题的特殊性在于，它与之前运用微积分分析求极大值和极小值的问题大异其趣，而是需要求出一个满足条件的函数(即曲线的方程)，这是微积分出现以来还未涉足的领域.约翰自己也在公布解法的信中如是说道：

“到现在为止，已经出现了许多处理最大值和最小值的方法，但似乎与此主题之间没有什么微妙的联系，以至于无法被他们的洞察力所参透 …… 即使是那些知名人物，如笛卡尔、费马等，也一定会坦率地承认，他们的权威方法在这里是不充分的 …… 在他们的著作中，我们没有发现对这种类型的极大值和极小值问题的考量，他们并没有将方法普遍化地运用.”[2]

由此观之，约翰敏锐的数学嗅觉使他敏锐地触及了这一问题更深层次的意涵：新的问题需要有新的、普遍的方法来解决，过去的方法已然不适用，那么对它的研究很可能促成新的数学理论的形成.事实上，最速降线问题的确引发了其后变分学的发生，以及更为广泛的泛函分析和数学物理方法研究.

2　问题溯源 伽利略的初步探索

最速降线问题早在1630年就被伽利略在《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》(Dialogo sopra i due massimi systemi del mondo, tolemaico e copernicano)中提出，他对此如是描述：“再谈一件奇事：沿着$\frac{1}{4}$圆弧AB运动的物体，比沿着弧度相同的弦运动，在时间上要短些，因此一个运动体从A点到B点的最短时间内最快速的运动，是沿着弧ADB走的，而不是沿着弦AB直线走的，尽管弦AB是A点和B点之间所能画出的最短的线.再者，同一弧上取任何一点(例如D点)，画两根弦AD和DB；那么运动体沿两根弦AD和DB从A点到B点，比沿着一根弦AB走的时间要少些.但是最短的时间将是沿着弧ADB降落的时间；而且，从最低限B向上作的较短的弧，应当说都一律服从上述的情况.”[3]

而在伽利略1638年的《关于两门新科学的对话》(Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze)中，他进一步对此问题的回答进行了总结：“从前面可以推断，从一个点到另一个点的最快下降路径不是最短的路径，即一条直线，而是一个圆弧.…… 因此，内接多边形越接近一个圆圈，从A下降到C所需的时间越短.对于小象限，已证明的象限也适用，推理是一样的.”[4]

伽利略的探究思路是这样的：如图 1 所示，伽利略根据观察现象（沿$\frac{1}{4}$圆弧 AB 运动的物体比沿同弧所对的弦 AB 运动的时间少）和他已发现的自由落体规律（质点速度与下降高度的平方根成正比），合理地推断，在弧 AB 上任取一点 D，既然 AD 和 DB 组成的折线比弦 AB 在弯曲程度上更趋近于弧 AB，那么质点沿这两根弦的路径运动所需的时间就比弦 AB 少，而多于弧 AB. 于是伽利略不加验证地将此情形推广到极限，即“内接多边形越接近一个圆圈”，据此伽利略认为，最速降线的路径便是圆弧，如图 2 所示.

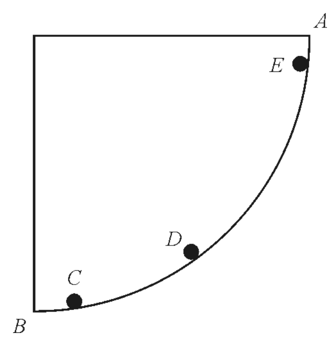

图 1 《两种体系》原图

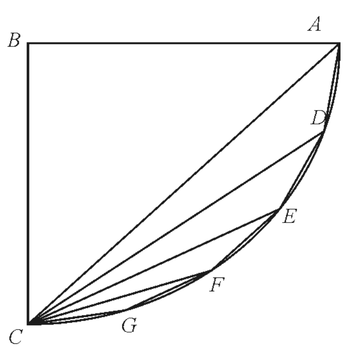

图 2 《两门科学》原图

伽利略所作推论的逻辑链条在最后一步产生了错误，结论流于草率，而且有预设答案的嫌疑. 伽利略是深受古希腊以来的天文学传统影响的，他所支持的哥白尼学说是建立在天体以圆为完美的运行轨道的基础上的；而且在知晓了开普勒的工作之后，他仍然坚持这一点. 这就可以解释他偏爱圆或圆弧作为运动路径的答案，因为任何完美的运动都应当与圆周运动相关.

此外，疏于实证而停留在思想实验层面，也是导致伽利略产生错误结论的原因之一. 在确认了直线段和折线段不可能成为用时最少的路径后，伽利略直接就认为平滑的圆弧曲线就是答案，“显然，他把自己的比较范围锁定在直边形、圆弧这样一些‘规则’的图形之中，如果要得到正确的结论，还需要将比较的对象进行扩大，也就是需要在更大的曲线范围内考虑问题. 从现在的观点看，至少应当把最速降线问题的解 —— 旋轮线弧包含在内.”[5] 伽利略很可能并未设计并制造数个斜曲面，以实验方式来比较物体在其上的运动时间；同时，他也缺乏对除了圆锥曲线外其他类型曲线的认识.

伽利略无法得出正确解还有数学方法上的因素. 在他的两大著作中，广泛使用的是自几何原本以来就被确立为传统的几何方法，而几何方法中的穷竭思想导致的错误判断是很常见的，从阿基米德到他同时代的开普勒，都有过对穷竭类比方法的错误应用. 最速降线问题的解决正是得益于数学思想方法的变革：微积分的产生以及解析几何代数分析的方法，成为了解决这一问题的有力工具. 正如约翰 · 伯努利后来评价的那样[6]：

“尽管伽利略毫无疑问是他同时代最具洞察力的人物，然而由于缺乏新的分析工具，才使得这样一位伟人做出了悬链线是一条抛物线、最速降线是一段圆弧此类错误猜测.”

3　公开挑战的过程

在发起公开挑战的同时，约翰在同年 6 月 9 日写信给他的老师，同时也是《教师学报》主编的莱布尼茨，私下告知其这一问题. 一周之后的 6 月 16 日，莱布尼茨回信简要地给出了一种解答[7]，但他建议约翰将挑战截止时间由 1696 年底延至 1697 年复活节，使得欧洲其他地区的一些数学家，特别是法国和意大利的数学家，能拥有充足的时间准备和参与这次挑战. 在没有收到任何回信解答后，约翰 · 伯努利于 1697 年元旦发表了有关此问题的又一次公告. 公告中他听从莱布尼茨的建议，将原来所设的挑战终止期限推迟至当年复活节.

这一次，在规定的时间内，共有 4 位数学家给出了解答：牛顿、雅各布 · 伯努利（Jakob Bernouli，1654 — 1705）、莱布尼茨和洛必达（Guillaume de l'Hôpital，1661 — 1704），解答方案发表在了当年 5 月的《教师学报》上[8]. 值得一提的是牛顿早在 1697 年 1 月 29 日花费一个晚上就得出了解答，牛顿的心态可以从他的话中窥得一二：“我不愿意在有关数学

的事情上被外国人纠缠和嘲弄 ……”. 牛顿的解答匿名发表在了当月的《哲学汇刊》(Philosophical Transactions of the Royal Society of London) 上[9],而据说约翰在见到这种解法后,惊呼“从这锋利的爪中,我认出了雄狮”.

像这样广而告之的大型挑战,其实质固然是数学本身的进步导致的,因为没有这些新问题、新方法和新思想,即使数学家们再如何争强好胜,也不能无事而生非. 因此,最速降线问题的新颖性、重要性和奇特性是引发此次挑战的重要内在诱导因素[5]. 对新发现秘而不宣却采取公开挑战的形式,则是由于公开挑战的文化传统、英国与欧陆的分离主义情绪、以及几位主要参与者的性格特点等几点外因所致.

公开挑战的传统早已有之. 16 世纪在意大利发生的塔塔利亚(Tartaglia, 1499－1557) 与菲奥尔关于一元三次方程的竞赛, 以及其后卡尔达诺 (Girolamo Cardano, 1501 － 1576) 弟子费拉里 (Ferrari Lodovic, 1522 － 1565) 和塔塔利亚 (NiccoloTartaglia of Brescia, 1499－1557) 关于解一元三次、四次方程的公开比赛是代数发展史上浓墨重彩的一笔,塔塔利亚更是饱尝了胜利带来的喜悦和荣耀以及失败结下的苦果. 对自己的成果秘而不宣,既是限制于当时并不便利的传播条件,也根源于没有成熟完整的学术评价体系和社会建制;公开挑战则是在此情形下为保障发现的优先权和获取学术资本与声誉的应对之策.

最速降线的挑战适逢英国光荣革命之后,英国的代议制政体确立,与此同时英国人也扭转了英荷战争失败所带来的海上贸易局面. 政治和经济上的变化促使着英国人心态的转变,上文所引牛顿的话可见一斑. 这种分离主义的情绪可以从其后的微积分发明权之争中窥见一斑:1699 年法蒂 (Nicolas Fatio de Dullier, 1664－1753) 发表了宣称牛顿在微积分的发现中处于优先地位、并且很大程度上暗示莱布尼茨从他那里窃取了一些想法的文章[10],由此开启了英国与欧陆学者旷日持久的争论, 直到 1716 年莱布尼茨去世才稍为平息. 因此,国家层面的实力对比变化也有部分影响.

约翰·伯努利个人的好胜心则是发起此次挑战的直接原因. 雅各布是约翰的长兄,也极富数学上的才华,两人在学术上多有争论,不止在最速降线问题上,还在悬链线挑战以及教职等多方面有矛盾;两人既是兄弟,又是对手. 而约翰发起挑战的目标还不止于此,他的老师莱布尼茨,以及当时已任皇家铸币局总监的牛顿,都被他视作了潜在的挑战对象. 约翰在他的挑战书中这样写道:

“只有极少数人能够解决我们的绝妙问题,是啊,即使是那些自称能解决我们极好的问题的数学家也少之又少 …… 他们利用黄金法则巧妙地扩展了数学的范围,这些黄金法则(他们认为的) 谁也不知道,但实际上早已由别人发表过了. ”[11]

然而牛顿也不示弱,在造币局公务繁忙之余仍轻松应对了挑战. 总之,约翰和牛顿的好胜心其目的都是求真的,是对数学问题本身的关注.

约翰·伯努利如此踊跃发起挑战的原因,还有一部分来源于他本人对于其解法的自信;他的解法巧妙地运用了斯涅尔折射定律和费马原理,将质点的运动与光在非均匀介质中的连续折射进行了类比,找到了最速降线问题的一种巧妙解答.

4 约翰·伯努利的巧妙解答

约翰的解法借用了利用了光学的定律进行类比[12],来解决这个由重力引发的力学问题. 这种思想至少可以追溯至阿基米德, 他在《方法》(’Εφοδος) 一书中利用力学的杠杆原理,求解出抛物弓形的面积是同底等高的三角形的 $\frac{4}{3}$ 这一个几何命题[13]. 约翰将理想的质点顺着最速降线滑下的过程想象成是光在不同折射率的均匀介质(如同许多层叠起来的不同折射率的玻璃) 中连续地传播;而根据斯涅尔定律,这相当于光以不同的速度渐渐通过这些玻璃,形成了一条曲折的轨迹,再将这些玻璃的层数推向无限,再根据费马原理可知得到的平滑曲线即为最速降线.

当光以斯涅尔定律进行折射时,有

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2}=\text{constant} \tag{1}$$

即曲线上每一点(除了起点外) 的切线和垂直直线夹角(即入射角) 的正弦值与光在该点处的速度成正比.

如图 3 所示,A 为光运行的起点,FAG 为水平线,AD 为竖直线,FGD 侧为折射率不同的介质,如

HM 线上的介质密度处处相同，以 AC 为 x，AG 为 y，则在微分三角形 Mmn 中，有

$$\sin\theta_r = \frac{nm}{Mm} = \frac{dy}{dz} \tag{2}$$

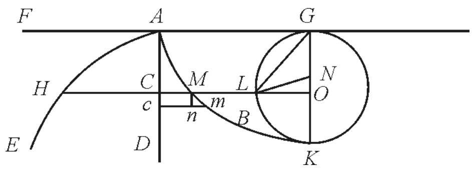

图 3　约翰的证明示意图

由式(1)，不妨设 $\sin\theta_i = \frac{v_i}{a}$，则有

$$\frac{dy}{dz} = \frac{v}{a} \tag{3}$$

其中 a 为比例因子，v 为待求曲线上一点的速度. 而弧微分 $dz^2 = dx^2 + dy^2$，则

$$dy^2 = \frac{v^2}{a^2}dz^2 = \frac{v^2}{a^2}(dx^2 + dy^2) = \frac{v^2}{a^2}dx^2 + \frac{v^2}{a^2}dy^2$$

整理可得

$$dy^2 = \frac{v^2}{a^2 - v^2}dx^2$$

于是有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{\sqrt{a^2 - v^2}} \tag{4}$$

再根据伽利略时代起就已知的质点下落的速度与高度的平方根成正比的规律，则图 3 左侧曲线 AHE 为抛物线，CH 即为此时的速度 v，此时可设

$$v = \sqrt{ax}$$

将此代入式(4)，则有

$$dy = \sqrt{\frac{x}{a - x}}\,dx \tag{5}$$

而式(5) 正是摆线(cycloid，又叫旋轮线) 的微分方程，表示直径为 a 的圆产生的倒摆线，即如图 4 所示的下凸曲线.

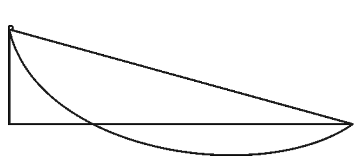

图 4　最速降线示意图

约翰在得到答案后表示了由衷的惊奇和赞叹，因为最速降线正是当时数学家们所熟知的摆线，也正是伽利略为它命名的：

“在作总结之前，我不能不再次表示我对惠更斯(Christiaan Huyghens，1629 — 1695) 的等时曲线(tautocbrone) 和我们的最速降线碰巧相同所感到的惊奇. 此外，我认为值得注意的是，这种同一性只能在伽利略的假设中找到，因此从这个假设中，我们也可以推测，大自然希望它是如此的. 因为大自然总是习惯于以最简单的方式运作，所以在此她通过同一条曲线完成两种不同的任务. ”[2]

约翰在他自己巧妙的解答中读出了大自然的经济本性：大自然总是会做效率最高的事情. 费马原理中已经含有了这种自然是最经济化的思想. 这一思想使得约翰不再像通常使用微积分求极大值极小值那样很局部地考察粒子在每个点上的情况，而是考虑所有可能的路径并且找到大自然选择的最好的那一条. 而且抛开这些自然神论的宗教观点不谈，只将最小光程的光传播现象当做一个经验事实也足以使人接受. 约翰的这种解法虽然没有直接运用变分法的思想，但最小时间的思想在其解法中起了基础性的作用，具有极为重要的先导意义；约翰的这项工作也在很大程度上引发了欧拉、拉普拉斯关于力学中最小作用原理的研究，进而为变分法的创立和发展提供了强有力的动力[5].

附言

最速降线问题完备的解答需要用到变分学的知识，当时以及后来的数学物理学家都给出了许多各具特色的解法，促进了 18 世纪数学和物理的发展.

摆线(即最速降线) 在工业中的应用十分广泛，那么在生活中呢？譬如图 5 所示的滑板场，如果设计成摆线形状，就可以成为下滑最快的坡道. 但是很遗憾，设计者们虽然知道这一点，但从不设计成最速降线.

图 5　滑板场

参 考 文 献

1 Johann Bernoulli. Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur[J]. (A new problem to whose solution mathematicians are invited.), Acta Eru - ditorum, 1696(6):269

2 David Eugene Smith. A Source Book in Mathe - matics[M]. New York:Dover Publications Inc. ,1959. 648 ～ 649

3 伽利略. 关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话[M]. 上海:上海人民出版社,1974. 583 ～ 584

4 Galileo Galilei. Discourses and Mathematical Demon - strations Realating to Two New sciences[DB/OL]. (2000 - 10 - 06)[2021 - 01 - 31] http://gali - leoandeinstein. physics. virginia. edu/tns_draft/tns_160to243. html

5 贾小勇. 19 世纪以前的变分法[D]. 西安:西北大学, 2008. 18

6 Johannis Bernoulli. Opera omnia, tam antea sparsim edita, quam hactenus inedita[M]. Lausannæ; Genevæ: Sumptibus Marci - Michaelis Bousquet & Sociorum, 1742(1):199

7 Gottfried Von Leibniz. Mathematische Schriften[M]. Berlin:Verlag von A. Asher&Comp. ,1849

8 Gottfried Von Leibniz,Johann Bernoulli, Jocob Bernoulli, et al. Communicatio suae pariter, duarumque alienarum ad edendum sibi primum a Dn. Jo. Bernoullio, deinde a Dn. Marchione Hospitalio communicatarum solutionum problematic curva celerimi descensus a Dn. Jo. Bernoullio Geometris public propositi, unacum solutione sua problematic alterius ab codem posteapropositi[J]. Acta Eruditorum Anno 1697(19):201 ～ 205, 206 ～ 211, 211 ～ 214, 217 ～ 220, 223 ～ 224

9 Issac Newton. De ratione temporis quo grave labitur per rectam data duo puncta conjungentem, ad tempus brevissimum quo, vi gravitatis, transit ab horum uno ad alterum per arcum cycloidis(On a proofthe time in which a weight slides by a line joining two given points [is] the shortest in terms of time when it passes, via gravitational force, from one of these [points] to the other through a cycloidal arc)[J]. London:Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 19:424 ～ 425

10 Rob Iliffe, Scott Mandelbrote. The Newton Pro - ject[DB/OL]. (2019 - 09 - 01)[2021 - 01 - 31] http://www. newtonproject. ox. ac. uk/his - life - and - work - at-a - glance

11 J. J. O'Connor, E. F. Robertson. The brachistochrone problem[EB/OL]. (2002 - 02 - 01)[2021 - 01 - 31] http://mathshistory. standrews. ac. uk/HistTopics/Brachi-sto - chrone. html

12 Paolo Freguglia, Mariano Giaquinta. The Early Period of the Calculus of Variations[M]. Springer International Publishing Switzerland, 2016:39 ～ 45, 53 ～ 57

13 梁宗巨. 世界数学通史(上册)[M]. 沈阳:辽宁教育出版社,2005. 51

The History of Brachistochrone Issue and an Ingenious Solution

Yang Yiyi

(School of History and Culture of Science, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240)

Abstract:Tracing and exploring the history of the brachistochrone problem. Begin with Galileo's initial exploration of this question, briefly narrate the process and reasons of Johann Bernoulli's open challenge, introduce his ingenious solution to this question, then expound the historical significance of his promotion of the development in the field of analysis in the 18th century.

Key words: brachistochrone; Galileo Galilei; Johann Bernoulli