谨防静摩擦因数足够大的一个“陷阱”

郑　金
（凌源市职教中心　辽宁 朝阳　122500）

（收稿日期：2021－02－01）

摘　要：对有关水平地面上的直杆从竖直状态发生倾倒运动的一道错题及其错解进行分析探讨和修正，并且得出了直杆在倾倒过程中受到地面的弹力和静摩擦力分别随偏转角变化的规律.

关键词：直杆　静摩擦因数　静摩擦力　错题　错解

对于两个固体的接触面，动摩擦因数是有限值，当相互作用的弹力很小时，摩擦力不可能很大；当相互作用的弹力为零时，不可能存在摩擦力. 但在某些力学竞赛题中给出“静摩擦因数足够大”的条件，由此默认为静摩擦力足够大，而且物体始终不滑动[1]. 这种观点是不正确的，下面对一道错题及其解答进行探讨.

1　原题与错解

【原题】在水平地面上，竖直直立一根长为 $2a$，质量为 m 的匀质直杆，杆与地面间的静摩擦因数足够大. 现对杆施一微扰，使其从竖直位置开始自由倒下，如图 1 所示，求：当杆与竖直方向的夹角为多大时，杆的下端开始脱离地面？

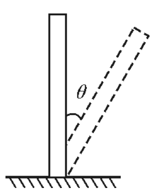

图 1　倾倒的直杆

原解：从初始状态到杆恰好离地瞬间，由机械能守恒定律有

$$mga(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}I\omega^2 \tag{1}$$

其中直杆绕端点转动时的转动惯量为

$$I=\frac{1}{3}m(2a)^2=\frac{4}{3}ma^2 \tag{2}$$

以直杆与地面接触点为轴，由转动定理有

$$mga\sin\theta=I\beta \tag{3}$$

由式(1)、(2) 可得直杆的角速度平方为

$$\omega^2=\frac{3g}{2a}(1-\cos\theta) \tag{4}$$

由式(2)、(3) 可得杆转动的角加速度为

$$\beta=\frac{3g}{4a}\sin\theta \tag{5}$$

直杆质心绕接触点转动的切向加速度和法向加速度分别为

$$a_t=a\beta=\frac{3g}{4}\sin\theta \tag{6}$$

$$a_n=a\omega^2=\frac{3g}{2}(1-\cos\theta) \tag{7}$$

刚好离开地面的瞬间，杆在竖直方向只受重力作用，由牛顿第二定律有

$$mg=ma_t\sin\theta+ma_n\cos\theta \tag{8}$$

可得直杆与竖直方向的夹角为

$$\theta=\arccos\frac{1}{3}=70.53^\circ$$

2　探讨与修正

上述解法看似正确，但所得结果却是错误的. 因为在推导过程中，默认为杆始终不滑动，而实际上，当 $\theta=70.53^\circ$ 时，杆早已发生滑动，因此原题有缺陷. 为了修正错题和错解，下面对原题进行拓展与解答.

【拓展】对原题而言，求：(1) 假设杆始终不滑动，杆受到地面的弹力 N 和静摩擦力 f 随偏转角 θ 变化的关系式并分析两个力函数的单调性；在同一坐标系中，分别画出 $\frac{f}{mg}$ 和 $\frac{N}{mg}$ 随 θ 变化的图像；(2) 当摩擦力减小为零时，杆的偏转角为多大？杆受到地面的弹力为多大？(3) 当杆的下端开始发生滑动时，杆的偏转角满足什么条件？

解析：(1) 对杆在水平方向和竖直方向分别由质心运动定理有

$$f = ma_{\mathrm{t}}\cos\theta - ma_{\mathrm{n}}\sin\theta$$

$$mg - N = ma_{\mathrm{t}}\sin\theta + ma_{\mathrm{n}}\cos\theta$$

可得杆受到地面的静摩擦力与弹力分别为

$$f = \frac{3}{4}mg\sin\theta(3\cos\theta - 2)$$

$$N = \frac{1}{4}mg(3\cos\theta - 1)^2$$

随着偏转角 θ 从零开始增大，$\cos\theta$ 从最大值 1 开始逐渐减小，可知地面弹力 N 单调递减，最大值等于 mg，最小值为零. 假设杆的下端始终不动，当刚好离开地面时，受到弹力为零，即

$$\frac{1}{4}mg(3\cos\theta - 1)^2 = 0$$

可得 $\cos\theta = \frac{1}{3}$，即 $\theta = 70.53°$.

刚开始，由于直杆没有相对滑动趋势，因此摩擦力为零，随着偏转角的逐渐增大，摩擦力再次为零，由此可知，在两个零之间存在最大值，则静摩擦力先增大，再减小到零. 当静摩擦力减小到零时，杆对地面的压力大于零，因此不是分离状态，而是摩擦力改变方向的临界状态. 在临界状态之前，杆受到地面的摩擦力方向向右，在临界状态之后，杆受到摩擦力的方向向左，然后逐渐增大.

下面求向右的静摩擦力取最大值时杆的偏转角.

先把静摩擦力的关系式去括号，再取导数为

$$f' = \frac{9}{4}mg(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - \frac{3}{2}mg\cos\theta$$

令 $f' = 0$，可得关于 $\cos\theta$ 的一元二次方程

$$6\cos^2\theta - 2\cos\theta - 3 = 0$$

解方程得

$$\cos\theta = \frac{1 + \sqrt{19}}{6} \approx 0.89$$

可知杆的偏转角略小于30°，且 $f_{\max} \approx 0.2mg$.

在假设杆始终不滑动的条件下，弹力和静摩擦力与重力的比值随偏转角变化的图像如图 2 所示.

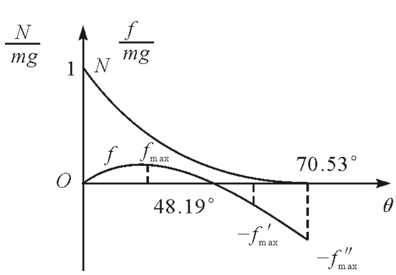

图 2　弹力和摩擦力随偏转角变化的图像

（2）由于静摩擦因数足够大，因此在静摩擦力减小到零之前，杆没有发生滑动，则由

$$f = \frac{3}{4}mg\sin\theta(3\cos\theta - 2) = 0$$

得 $\cos\theta = \frac{2}{3}$.

可知当摩擦力减小为零时杆的偏转角为 $\theta = 48.19°$.

此时杆受到地面的弹力大小为

$$N = \frac{1}{4}mg(3\cos\theta - 1)^2 = \frac{1}{4}mg$$

（3）当杆的偏转角小于48.19° 时，杆没有发生滑动，那么当杆的偏转角大于48.19° 时，由于压力逐渐减小，杆将发生滑动，考虑到摩擦力小于零，可知当杆刚好发生滑动时，满足 $-f = \mu N$，即

$$-\frac{3}{4}mg\sin\theta(3\cos\theta - 2) = \frac{1}{4}\mu mg(3\cos\theta - 1)^2$$

化简得

$$3\sin\theta(2 - 3\cos\theta) = \mu(3\cos\theta - 1)^2$$

这是杆刚好发生滑动时满足的条件. 此时静摩擦力达到极大值 $-f'_{\max}$，但 $\cos\theta \neq \frac{1}{3}$，即

$$\theta \neq 70.53°$$

如图 2 所示，当杆与竖直方向的夹角大于48.19° 时，随着正压力的减小，当反向摩擦力达到某一数值 $-f'_{\max}$ 时，杆将发生滑动. 在假设杆始终不滑动的条件下，当杆刚要离开地面时，与竖直方向的夹角为 $\theta = 70.53°$，此时正压力趋于零，静摩擦力达到另一个最大值 $-f''_{\max}$，但这是不可能实现的，因为在偏转角达到70.53° 之前，杆早已发生滑动了，因此当杆刚要离开地面时，与竖直方向的夹角不等于70.53°.

如果用细线把杆拴在地面上，使之不能发生滑动，那么当 $\cos\theta = \frac{1}{3}$ 时，即当 $\theta = 70.53°$ 时，杆对地面的压力刚好为零.

假设把原题作为竞赛题，那么对于“静摩擦因数足够大”的条件，参赛者将如何理解呢？如果认为杆始终不会滑动，虽然不切合实际，但却可以顺利解题；如果认为杆将会发生滑动，虽然合乎实际，但却难以解题，那么只能跳入题中默认的“陷阱”，即认为：只要静摩擦因数足够大，当正压力不为零时，静

摩擦力就足够大;或者说,只要静摩擦因数足够大,物体就始终不发生滑动.这种观点显然是错误的,但却有一定的迷惑性,因此很容易诱发错题与错解的出现.

综上可见,原题的设问与条件不自洽,需进行修正,有多种修改方法,既可改变条件,如把原题中的“杆与地面间的静摩擦因数足够大”替换为“杆下端放入浅槽内不能滑动”;也可改变设问,把原题中的1个设问替换为新拓展的3个设问.此外,杆的长度 $2a$ 可改为 $2b$,以免在解题时用到的字母与加速度符号雷同.

3 总结与启示

通过对原题进行修正或改编,可形成若干优质试题,具有一定的教学价值,既可作为大学物理复习资料,也可用于高中物理竞赛训练.

虽然原题及其解答的错误起因于“静摩擦因数足够大”,但这个条件本身没有错,从修改原题设问的角度而言,在原题中给出这个条件是必要的,以此表明在静摩擦力从最大值减小为零之前,杆不会发生滑动,为试题的改编与解答准备了条件.但若根据这个条件默认为杆始终不发生滑动则是错误的,或者说,对于如何保证杆始终不发生滑动,题中所设定的条件不合乎实际,由此导致试题的设问与条件不自洽.

因此在编拟试题时,不仅要体现试题的基础性、综合性、应用性和创新性,更要遵循科学性与自洽性的原则,这就需要在编题过程中对试题的背景、情境、赋值、条件和设问等方面进行反复推敲和严格论证,确保其规范合理,严谨周密,不存在科学性错误.

在教学或者教研过程中,无论选题或答题都需谨慎,以免出现错题或错解.还要提倡学术争鸣,敢于质疑,善于发现并且及时纠正错误,对于那些比较隐蔽的、或者是勉强默认的、甚至是广为流传的错误,有必要进行深入剖析,以正本清源.若能充分利用错题资源,变废为宝,将有助于对相关知识的确切理解和正确应用,更有利于提升学科核心素养.

参 考 文 献

1 陈廷国,李忠相.静摩擦因数足够大的一种临界“陷阱”[J].物理教学,2019,41(8):57 ~ 59

(上接第 39 页)

Correctly Understanding Time Dilation Formula in Special Relativity Theory and Its Applicable Conditions

——Reflecting on an Easily Mistaken Question in *College Physics Course* Edited By Chang Wenli

Wang Ruizhen
(College of Science,Xi'an Vocational University of Automobile,Xi'an, Shaanxi 710600)
Cai Zhidong
(Danyang Normal University,Zhenjiang College,Zhenjiang,Jiangsu 212300)

Abstract:Lorentz Transformation is the basis of theory of special relativity. However,the authors found that freshmen who firstly came with theory of special relativity often rigidly duplicatethe time dilation formula, regardless of the applicable conditions of time dilation formula. This article takes an error-prone question as an example,analyzes the reasons for students′ misunderstandings,and clarifies the difference between inherent time and coordinate time. Meanwhile,we also point out two different understandings of "relative velocity"and its influence on timecalculation. It is worth looking forward to the result that students can thoroughly discriminate the applicable conditions of time dilation formula.

Key words:theory of special relativity; Lorentz Transformation; time; dilation formula; applicable conditions; relative velocity