大学物理教学

光的多普勒效应探析

常玉如　王建平

（北京市育英学校　北京　100036）

（收稿日期：2021-03-04）

摘　要：多普勒效应（Doppler effect）是由奥地利物理学家及数学家克里斯琴·约翰·多普勒（Christian Johann Doppler）于 1842 年首先提出.主要内容为，当波源与观测者之间存在相对运动，观测者接收到波的频率（波长）将会发生变化.日常生活中声波频率的变化我们可以从经典物理学去理解和导出.但是对于光的横向多普勒效应根据经典物理学我们很难理解.本文应用狭义相对论的知识，导出光的多普勒效应公式，并探讨其运用.

关键词：多普勒效应　狭义相对论　频率

1　应用动量和能量守恒定律推导光的多普勒效应公式

如图 1 所示，有一个静止的原子，其静质量为 M，当原子发生跃迁时发出一个频率为 ν_0 的光子，且原子静质量变为 M_0，原子由于反冲所具有的动量为 p_0，则由能量守恒、动量守恒应有

$$Mc^2=h\nu_0+\sqrt{M_0^2c^4+c^2p_0^2} \tag{1}$$

$$p_0=\frac{h\nu_0}{c} \tag{2}$$

由式（1）、（2）可得

$$M^2c^4-M_0^2c^4=2h\nu_0Mc^2 \tag{3}$$

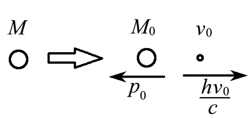

图 1　静止原子跃迁推导光的多普勒效应公式情境图

其次假设静质量为 M 的原子，其初始动量为 p_1，其跃迁后发出一个频率为 ν 的光子，如图 2 所示，原子跃迁后静质量为 M_0，由于反冲，其动量变化为 p_2，则由能量守恒、动量守恒及余弦定理则应有

$$\sqrt{M^2c^4+c^2p_1^2}=h\nu+\sqrt{M_0^2c^4+c^2p_2^2} \tag{4}$$

$$p_2^2=p_1^2+\frac{h^2\nu^2}{c^2}-2p_1\frac{h\nu}{c}\cos\theta \tag{5}$$

由式（4）、（5）可得

$$2h\nu_0Mc^2=2h\nu\sqrt{M^2c^4+c^2p_1^2}-2cp_1h\nu\cos\theta \tag{6}$$

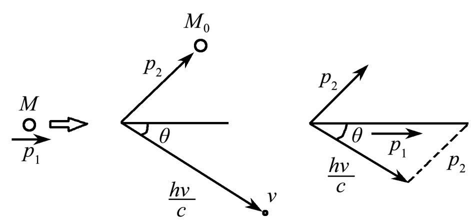

图 2　运动原子跃迁推导光的多普勒效应情境图

由洛伦兹变换和动量的定义可得

$$p_1=\frac{Mv}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{7}$$

将式（7）代入式（6）化简后可得

$$\nu=\nu_0\frac{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta} \tag{8}$$

当取 $\theta=0$ 的特殊情况时，有

$$\nu=\nu_0\frac{\sqrt{c+v}}{\sqrt{c-v}}$$

观测者接收光子的频率变高.当取 $\theta=\pi$ 的特殊情况时，有

$$\nu=\nu_0\frac{\sqrt{c-v}}{\sqrt{c+v}}$$

观测者接受光子的频率降低.

2　应用洛伦兹变换推导光的多普勒效应公式

假设与波源相对静止的参考系为 S^* 坐标系，S^*

作者简介：常玉如（1966-　），男，正高级，中学物理特级教师，主要从事中学物理教学.

通讯作者：王建平（1968-　），女，中教高级，主要从事中学物理教学.

系相对于地面坐标系的运动速度为 v，地面系中的时间 t 与 S* 中的时间 t^* 间的关系由洛伦兹变换可以得出为

$$t=\frac{t^*+\frac{vx^*}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{v}\right)^2}} \tag{9}$$

其中 x^* 表示在 S* 系中的坐标，对等式两边取微分，得到

$$\Delta t=\frac{\Delta t^*+\frac{v\Delta x^*}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{10}$$

又因为波源相对于 S* 系静止，所以 $\Delta x^*=0$，所以等式可改写为

$$\Delta t=\frac{\Delta t^*}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{11}$$

如图 3 所示，波源沿直线从右向左水平运动，波源发出 $n_0=\nu_0\Delta t^*$ 的振动次数，其中 ν_0 为 S* 系中所观测到的波的频率，最初的一束波经过了时间 $\Delta t_1=\frac{r_1}{c}$ 被地面观测者所接收；在时间 Δt，波源的位移为 $v\Delta t$，此时波源相距地面系中的观测者的距离为 r_2（S 系中），此时波源发出最后一束波，这束波经过时间 $\Delta t_2=\frac{r_2}{c}$ 后被地面系中的观测者所接收.

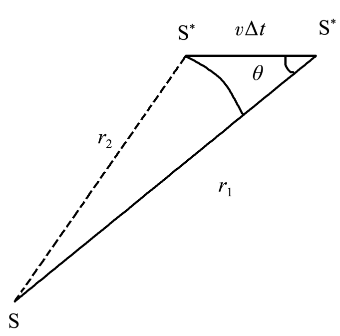

图 3　用洛伦兹变换推导光的多普勒效应公式情境图

所以，地面系中的观测者接收到最后一束波的时间为

$$\Delta t_S=\Delta t+\Delta t_2-\Delta t_1=\Delta t+\frac{r_2}{c}-\frac{r_1}{c} \tag{12}$$

由于 Δt^* 很小，所以有如下近似：

$$r_2=r_1-v\Delta t\cos\theta \tag{13}$$

将其代入式(12)，可得

$$\Delta t_S=\Delta t+\frac{r_2}{c}-\frac{r_1}{c}=$$

$$\Delta t+\frac{r_1-v\Delta t\cos\theta-r_1}{c}=$$

$$\Delta t\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right) \tag{14}$$

则地面系中观测者所接收到的振动次数为

$$n=\nu\Delta t_S=\nu\Delta t\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right) \tag{15}$$

由式(11)和 $n_0=\nu_0\Delta t^*$ 可得

$$n_0=\nu_0\Delta t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \tag{16}$$

又因为波源处发出的振动次数应与地面系中观测者处接收到的振动次数相同，所以

$$n=n_0=\nu\Delta t\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)=$$

$$\nu_0\Delta t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \tag{17}$$

由式(17)可解得

$$\nu=\nu_0\frac{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}$$

【例题】如图 4 所示，光源 S 向全反射体 S' 发射一束平行光，发光功率为 P_0. 设 S' 以匀速度 v 沿其法线方向朝 S 运动. 试求 S 接收到的发射光功率.

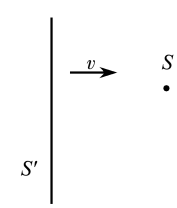

图 4　例题图

分析：光源 S 接收到的反射光功率与发出去的光功率不相同. 首先，由于多普勒效应，S 接收到的反射光频率不同于发射频率，这导致光子能量的改变. 其次，由于时间膨胀效应及反射体的运动，S 在单位时间内发射的光子总数与接收到的发射光子总数不同. 上述两种原因导致接收到的光功率有别于发射出去的光功率.

解：设光源 S 和反射体分别静止于 S 系和 S′ 系，光源在 S 系中单位时间内发出的第 i 种光子的频率和光子数分别为 ν_{0i} 和 n_{0i}. 发光功率可表示为

$$P_0=\sum_i n_{0i}h\nu_{0i}$$

对 S′ 系来说，由于多普勒效应，接收到的和反射出去的光子的频率为

$$\nu_i'=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\nu_{0i}$$

式中

$$\beta=\frac{v}{c}$$

同样由于多普勒效应，光源 S 接收到的光子频率为

$$\nu_i=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\nu_i'=\frac{1+\beta}{1-\beta}\nu_{0i}$$

光子数和光速在 S 系和 S′系中是不变量，但“单位时间”在 S 系和 S′系中有不同标准. 若 S 系中一个单位时间内发出 n_{0i} 个光子，由于时间膨胀效应，S′系中认为这个过程所经时间是 S 系中一个单位时间的 $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 倍. 故从 S′系看来，在单位时间内光源发出的光子数为

$$n_{0i}'=\sqrt{1-\beta^2}\,n_{0i}$$

S′系中的观测者认为光源一面以速度 v 朝自己运动，一面不断发射光子，如图 5 所示，单位时间内(S′系的时间)由 S 发出的光子一定处于图中的画斜线的区域内，该区域中光子的总数为 n_{0i}'，它们在 $\Delta t'$ 时间内全部到达 S'.

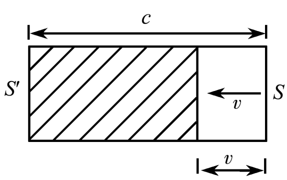

图 5　在 S′系中观察的情形

由图可知 $\Delta t'=\frac{c-v}{c}$，故在 S′系中单位时间内到达反射体的光子数为

$$n_{0i}''=\frac{n_{0i}'}{\Delta t'}=\frac{c}{c-v}\sqrt{1-\beta^2}\,n_{0i}=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta}n_{0i}=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,n_{0i}$$

S′系中单位时间内有同样多的光子被反射出去，对 S 系中的观测者，反射体 S' 以速度 v 朝自己运动. 同理，单位时间内(S 系中的时间) S 接收到的反射光子数为

$$n_i=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,n_{0i}''=\frac{1+\beta}{1-\beta}n_{0i}$$

于是 S 接收到的光功率为

$$P=\sum_i\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}n_{0i}\right)\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)h\nu_{0i}=\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^2\sum_i n_{0i}h\nu_{0i}=\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^2P_0$$

显然，S 系接收到的反射光的功率大于发射出去的光功率. 这是由于反射体受到光压作用，为维持反射体的匀速运动，外力必须做功，此功转变为发射光的能量.

参 考 文 献

1　舒幼生，胡望雨，陈秉乾. 物理学难题集萃[M]. 合肥：中国科学技术大学出版社，2014. 8

(上接第 3 页)

量的多少(容热本领)的方法——吸收热量 Q 除以质量 m，再除以升高的温度 Δt，得到单位质量的某种物质温度升高 1 ℃所吸收的热量 $\frac{Q}{m\Delta t}$，不同的物质，这一比值一般不同，它能够反映出不同物质对热(内能)的容纳本领，我们将这一比值叫做物质的比热容，它反映的是物质的容热本领大小，而非吸热能力强弱.

因此，笔者认为将课本“比较不同物质的吸热能力”实验名称改为“探究物质的比热容”或说成“探究不同物质的容热本领”更为恰当，既点明了实验目的，又突出了比热容概念. 进而由此引导学生对观察到的实验现象“同质量、同初温的水和煤油，用相同的酒精灯加热，煤油的温度升高得快”是因为煤油比水的容热本领小，即煤油的比热容比水小，如此学生学习就不会犯糊涂了. 如果教师在教学中再将其形象地打个比方：两个容纳水(热)的容器，它们等高但底面积不相等，若装入等质量的水，容积(容热本领)小的，水位就升高(温度变化)得多；若两容器中水位升高(温度变化)一样，容积(容热本领)大的容纳的水(内能)就多，即其比热容就大，亦好比一个人的胸怀，胸怀宽广的，能容纳的事情就多而不发火，心胸狭窄的，一点小事就发火，比热容大的相同情况下能够容纳更多的热量而温度却改变的小，比热容小的容纳一点热量温度就升高很多. 在此基础上引导学生讨论分析得出沿海地区的气温变化没有内陆地区明显，其根本原因在于沿海地区水多，而水的比热容较大，在相同受热情况下，其容热本领较强，故温度变化较小；汽车发动机里面用循环流动的水来进行冷却也正是因为水的容热本领大，在同样条件下，它可以吸收(容纳)更多的热(内能)循环带出散发，从而起到更好的冷却效果等等，如此类比与演练，悄然化解这一教学难点.

实践证明，厘清“吸”“容”之别，方能有效突破“比热容”这一概念教学难点，准确表达，“授”“受”清晰，效果更好.