

中学阶段对“落体偏东”现象的公式推导

张明

(江苏省盱眙中学 江苏 淮安 211700)

(收稿日期:2021-03-20)

摘要:通过文章的解释中学阶段的学生可以理解落体偏东现象,并能用近似的方法得出落体偏东的数量级大小关系.进一步介绍了一种方法,可以简易地推导出落体偏东的定量公式.

关键词:落体偏东 科里奥利力 变加速运动 微元法

1 引言

众所周知,初速度为零,只受重力的运动为自由落体运动,自由落体运动是由静止开始的匀加速直线运动,方向竖直向下^[1].曾有学生向笔者提出,看到有资料书上介绍过自由落体运动并不是竖直向下的,落地点是偏向东的,这是怎么回事呢?为什么平时没有观察到落体偏东的现象呢?

2 难以观察的原因

如图1所示,在北半球纬度为 λ 的一质点从近地面高为 h 的地方自由下落,文献[2]中运用高等数学建立微分方程组,两次积分后得到轨道方程为

$$y^2 = -\frac{8\omega^2 \cos^2 \lambda}{9g} (z-h)^3$$

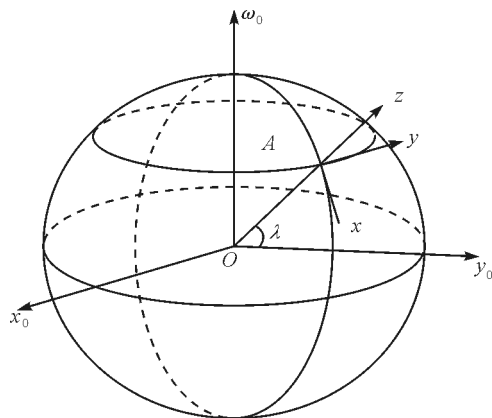


图1 北半球纬度为 λ 的经纬线
到达地面时 $z=0$,偏东的距离^[2]

$$y = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8h^3}{g}} \omega \cos \lambda \quad (1)$$

若 $\lambda = 40^\circ$, $h = 200 \text{ m}$,可算出 $y \approx 4.75 \times 10^{-2} \text{ m}$,偏东距离不足5 cm,故难以察觉.

显然,如果照搬大学教材,中学阶段的学生既没有理论力学知识的相关物理基础,也不具备相应的数学知识和运算能力,学生肯定是无法接受的.但是学生已经提出了问题,如何能让学生理解,有所收获呢?

3 近似为平抛运动

有学生提出平抛运动模型:在距地面一定高度的物体,由于随地球自转而具有的线速度,大于地面上物体的线速度.所以该物体下落时必然相对地面有一个偏东的速度,落点自然就会偏东如图2所示.

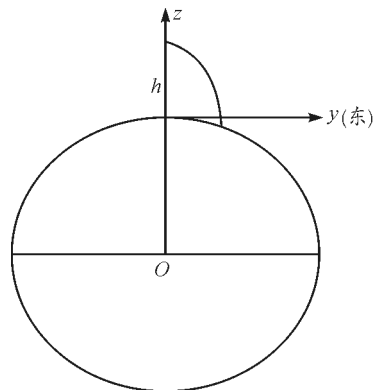


图2 平抛运动模型

物体相对地面向东的水平速度为

$$v = \omega(R+h) \cos \lambda - \omega R \cos \lambda = \omega h \cos \lambda$$

下落时间 $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, 则偏东的水平距离为

$$y = vt = \sqrt{\frac{2h^3}{g}} \omega \cos \lambda \quad (2)$$

式(2)与式(1)相差一个系数 $\frac{2}{3}$. 若将 $\lambda = 40^\circ, h =$

200 m 代入, 可以算出

$$y \approx 7.5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

即约为 7.5 cm, 比式(1)算出结果略大, 但两者数量级相同, 因此, 看作平抛运动也具有一定的意义, 因为中学生对平抛运动是熟悉的, 在离地不是太高, 计算精度要求不高时, 可以作为数量级的估算.

4 用微元法推导

地球绕地轴转动, 是一个转动参考系. 在地球非惯性系中, 相对地球运动的物体要受到惯性力——科里奥利力 $\mathbf{F} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ 的作用, 对于落体运动 $\mathbf{v} = \mathbf{g}t$, 物体下落时受到一个水平向东并逐渐增大的力, 在北半球纬度为 λ 产生的加速度大小 $a = 2\omega g t \cos \lambda$ [2,3]. 式(2)之所以出现偏差, 就是因为水平方向不是匀速的, 而是从静止开始有一个逐渐增大的加速度. 若将加速度作为已知条件, 则落体偏东现象可以归结为一个中学生可以理解并能解决的问题, 即求解一个变加速直线运动.

问题: 一物体初速度为零, 加速度大小为 $a = kt$, 求在 t 时间内运动的距离 y . (其中 $k = 2\omega g \cos \lambda$,

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}})$$

解析: 将时间均分为无穷多的 n 段, 在每一小段

时间 $\Delta t = \frac{t}{n}$ 内都可以看作是匀速运动, 则第 i 段内物体运动的距离 $\Delta y_i = v_i \Delta t$, 则

$$\begin{aligned} v_i &= \sum \Delta v_i = \sum a_i \Delta t = \sum kt_i \Delta t = k \left(\sum t_i \right) \Delta t = \\ &k(\Delta t + 2\Delta t + 3\Delta t + \cdots + i\Delta t) \Delta t = \\ &k \frac{\Delta t + i\Delta t}{2} i \Delta t = \\ &\frac{1}{2} k [(1+i)i] (\Delta t)^2 \end{aligned}$$

上式中 $(1+i)i$ 略去 i 的一次项小量, 则

$$(1+i)i \approx i^2$$

可得

$$v_i = \frac{1}{2} k (i\Delta t)^2$$

$$y_i = \sum \Delta y_i = \sum v_i \Delta t =$$

$$\sum \frac{1}{2} k (i\Delta t)^2 \Delta t = \frac{1}{2} k \left[\sum (i\Delta t)^2 \right] \Delta t =$$

$$\frac{1}{2} k [(\Delta t)^2 + (2\Delta t)^2 + (3\Delta t)^2 + \cdots + (i\Delta t)^2] \Delta t =$$

$$\frac{1}{2} k (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + i^2) (\Delta t)^3$$

利用数学公式

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{则 } y_i = \frac{1}{2} k \frac{i(i+1)(2i+1)}{6} (\Delta t)^3$$

略去小量可得

$$y_i = \frac{1}{6} k i^3 (\Delta t)^3 = \frac{1}{6} k (i\Delta t)^3 = \frac{1}{6} k t_i^3$$

将 $k = 2\omega g \cos \lambda, t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ 代入即可得

$$y = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8h^3}{g}} \omega \cos \lambda \quad (3)$$

与式(1)相同.

5 上抛偏西

如果将一个物体竖直向上抛出, 同样由于科里奥利力 $\mathbf{F} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ 的原因, 上升过程有向西的加速度, 向西的水平速度逐渐增加, 而下降过程有向东的加速度, 向西减速运动, 落地点实际偏西. 基于同样的方法可以推导出定量的结果, 这里就不赘述了.

中学阶段, 作为背景知识, 多了解不仅可以拓宽视野, 对高考也不无裨益, 试举例:

【例题】(2018年高考北京理综第20题) 根据高中所学知识可知, 做自由落体运动的小球, 将落在正下方位置. 但实际上, 赤道上方 200 m 处无初速下落的小球将落在正下方位置偏东约 6 cm 处, 这一现象可解释为, 除重力外, 由于地球自转, 下落过程小球还受到一个水平向东的“力”, 该“力”与竖直方向的速度大小成正比, 现将小球从赤道地面竖直上抛, 考虑对称性, 上升过程该“力”水平向西, 则小球()

A. 到最高点时, 水平方向的加速度和速度均为零

B. 到最高点时, 水平方向的加速度和速度均不为零

C. 落地点在抛出点东侧

关于 Kane 难题的一种解决方案

张九铸

(金昌市龙门学校 甘肃 金昌 737100)

(收稿日期:2021-04-27)

摘要:两个刚体的摩擦碰撞,存在所谓 Kane 难题,即有时算出的系统动能损失为负.文章指出,这是由于问题给出的运动学条件、几何条件、动摩擦因数和恢复系数,往往不足以确定刚体在碰撞过程各阶段的受力或各力关系,甚至库仑摩擦定律不再适用.鉴于此,引入了“切向恢复系数 k ”概念,即二碰撞点的最终切向相对速度与初始切向相对速度之比,导出了针对两个做平面平行运动的刚球在碰撞过程中的动能损失计算式,据此及能量守恒定律给出了 k 值的范围及物理意义,避免了动能损失小于零的结果.

关键词:Kane 难题 碰撞 动能损失 切向恢复系数

1 引言

如图 1 所示,质量为 m_1 ,半径为 r_1 的均质刚性球壳绕其直径的转动惯量为 J_1 ,与刚性水平面进行斜碰.碰撞之初,球壳的质心速度为 \mathbf{V}_{01} ,与竖直的 Oy 轴负向的夹角为 α ,角速度 ω_{01} 沿逆时针方向.球壳与水平面之间的碰撞恢复系数为 e .再设上述各量能够保证:球壳碰撞点的水平初速度为 $v_{0x} > 0$,球壳在整个碰撞过程中受到方向不变的动摩擦力且该力满足库仑摩擦定律,动摩擦因数为 f_d .由平面

运动刚体动力学方程及恢复系数定义有

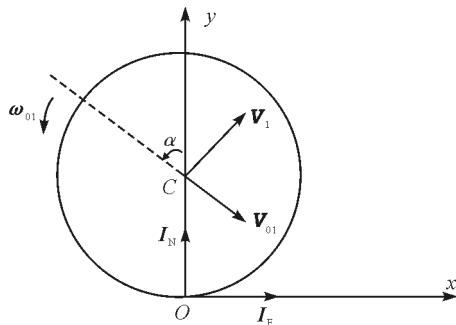


图 1 刚性球壳与刚性平面之间的碰撞

$$-f_d I_N = m_1 V_{1x} - m_1 V_{01} \sin \alpha \quad (1)$$

D. 落地点在抛出点西侧

基于题目的已知条件,可以分析出 D 为正确选项.

目前高考题越来越灵活、新颖,背景知识也越来越广阔.对于很多平时善于思考、勇于拓展和学习相关课外知识、努力提升综合能力的学生,在高考中面对以课本上没有出现过的知识为背景的试题时,无论见过与否,有了平时的历练和素养,会更快、更容易地做出结果.

6 结束语

在北半球,河流右岸的冲刷甚于左岸,右岸相对陡峭;火车铁轨的右轨所受到的压力大于左轨,因而磨损相对严重^[2];夏秋之际,在我国东南沿海经常出

现的台风,是逆时针流动的气旋.南半球的情况刚好相反.这些现象与落体偏东现象,背后都是科里奥利力在起作用.

在中学阶段,了解科里奥利力的意义不仅仅是为了掌握多少知识,更重要的是拓展学生科学视野,激发学习兴趣,培养勇于探索的科学精神.

参考文献

- 1 人民教育出版社,课程教材研究所,物理课程教材研究开发中心.普通高中物理·必修1(第2版)[M].北京:人民教育出版社,2006.42~44
- 2 周衍柏.理论力学(第2版)[M].北京:高等教育出版社,1986.254~257
- 3 程稼夫.中学奥林匹克竞赛物理教程(第2版)[M].合肥:中国科技大学出版社,2013.109~111