伯努利方程在电介质流体中的应用

冯子江　鲁　斌
（浙江省余姚中学　浙江 宁波　315400）

（收稿日期：2021－04－04）

摘　要：在电介质流体下引入了电势能密度的概念并推广了伯努利方程，并利用此方程解决电介质流体极化问题.

关键词：电介质　电偶极子　非均匀电场　伯努利方程

伯努利方程在力学中有广泛的运用. 由于其形式

$$p+\rho gh+\frac{1}{2}\rho v^2=C$$

式中不含电学量，故其在电学中应用甚少. 在电介质流体的相关问题中，可将伯努利方程作适当推广，以拓宽其应用范围.

1　电势能密度的导出

如图 1 所示，一个电偶极子在非均匀场中的受力

$$F=q\Delta E=q\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial l}\cdot \boldsymbol{l}=\boldsymbol{p}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial l}\qquad(1)$$

其中 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$ 为电偶极矩.

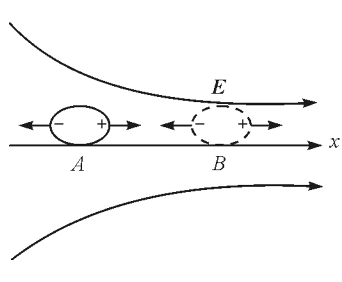

图 1　电偶极子在非均匀场中的受力

我们考虑体积为 $\mathrm{d}V$ 的分子团，单位体积内带有 n 个电偶极子，现沿 x 方向由 A 到 B，电场力做功

$$\mathrm{d}W_{AB}=\int_A^B F_{合}\,\mathrm{d}x=\int_A^B \boldsymbol{p}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}n\,\mathrm{d}V\mathrm{d}x\qquad(2)$$

由极化强度矢量

$$\boldsymbol{P}=\frac{\sum \boldsymbol{p}_i}{\Delta V}=n\boldsymbol{p}\qquad(3)$$

将式(3) 代入式(2)，有

$$\mathrm{d}W_{AB}=\mathrm{d}V\int_A^B \boldsymbol{P}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}\mathrm{d}x=$$

$$\mathrm{d}V\int_A^B P_x\frac{\partial E}{\partial x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}V\int_{E_A}^{E_B}\chi_e\varepsilon_0E_x\mathrm{d}E_x$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}W_{AB}}{\mathrm{d}V}=\frac{1}{2}\chi_e\varepsilon_0E_x^2\Big|_{E_A}^{E_B}=$$

$$\frac{1}{2}\chi_e\varepsilon_0E_B^2-\frac{1}{2}\chi_e\varepsilon_0E_A^2=$$

$$\frac{1}{2}P_BE_B-\frac{1}{2}P_AE_A=$$

$$\left(-\frac{1}{2}P_AE_A\right)-\left(-\frac{1}{2}P_BE_B\right)=$$

$$\varepsilon_{pA}-\varepsilon_{pB}\qquad(4)$$

则

$$\varepsilon_p=-\frac{1}{2}PE\qquad(5)$$

即为电介质在电场中的电势能密度.

2　伯努利方程在电介质流体中的推广

对于体积为 ΔV 的流体，根据伯努利方程，有

$$p\Delta V+\rho\Delta Vgh+\frac{1}{2}\rho\Delta Vv^2=C\qquad(6)$$

此表达式即为功能关系. $p\Delta V$ 为功，$\rho\Delta Vgh$ 为重力势能，$\frac{1}{2}\rho\Delta Vv^2$ 为动能. 同除以体积，我们也可以理解为 ρgh 为重力势能密度，$\frac{1}{2}\rho v^2$ 为动能密度. 在电介质流体中，$-\frac{1}{2}PE$ 的意义与 ρgh 相对应，表示电势能密度. 它们都具有压强的性质.

基于此，则在电介质流体定常流动的情况下，对

原有的伯努利方程进行推广,即

$$p+\rho gh+\frac{1}{2}\rho v^2-\frac{1}{2}PE=C \tag{7}$$

当然,若流体为其他性质的流体如磁介质等,方程还可做进一步相应的推广.

3　电介质流体的平衡问题

如图 2 所示,水平放置的平行板电容器,一块极板在液面上方,另一块极板浸没在液面下,液体的相对介电常数为 ε_r,密度为 ρ,传给电容器上下极板电荷面密度分别为 σ,$-\sigma$ 后,电容器中的液面可能升高多少?[1]

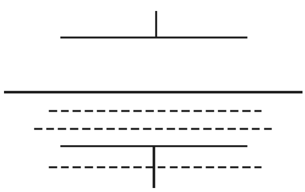

图 2　带有电介质流体的平行板电容器

3.1　能量极值求解法

如图 3 所示,设极板面积为 S,平衡后,新液面高出原液面的距离为 h.

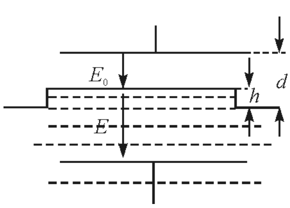

图 3　分析图

在空气中

$$E_0=\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{8}$$

在介质中,总场强

$$E=\frac{E_0}{\varepsilon_r}=\frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0} \tag{9}$$

由于电场的不均匀性,电场能量分为两部分,一是介质部分电场能量 E_{p1}

$$E_{p1}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2V_1=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\right)^2Sh=\frac{\sigma^2Sh}{2\varepsilon_0\varepsilon_r} \tag{10}$$

二是真空部分电场能量 E_{p2}

$$E_{p2}=\frac{1}{2}\varepsilon_0E_0^2V_2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2S(d-h)=\frac{\sigma^2S(d-h)}{2\varepsilon_0} \tag{11}$$

另外,介质液体还具有重力势能 E_{p3}

$$E_{p3}=\rho Shg\ \frac{h}{2}=\frac{\rho Sh^2g}{2} \tag{12}$$

则总能量

$$E_p=E_{p1}+E_{p2}+E_{p3}=\frac{\sigma^2Sh}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}+\frac{\sigma^2S(d-h)}{2\varepsilon_0}+\frac{\rho Sh^2g}{2}$$

由于平衡位置能量取极值,则有

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}h}=0$$

化简得到

$$h=\frac{\varepsilon_r-1}{2\varepsilon_r\varepsilon_0\rho g}\sigma^2 \tag{13}$$

3.2　运用电势能密度的压强性质求解法

为解决本题,我们构造一系列过程,如图 4 所示.

体积为 ΔV($\Delta V\rightarrow 0$)的分子团,处在 A,B,C 这 3 处时具有不同的电势能密度,即对应不同的压强.

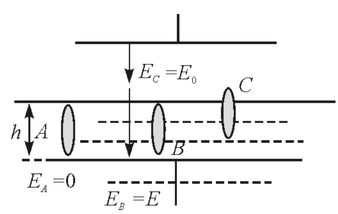

图 4　构造过程

第一个过程,将分子团从电容外一点位置 A($P_A=0$)移动到电容内等高的位置 B,发生一段虚位移.

$$\varepsilon_{pA}=-\frac{1}{2}P_AE_A=0$$

$$\varepsilon_{pB}=-\frac{1}{2}P_BE_B<0$$

由于 B 点的电势能小于 A 点,则分子团有从 A 向 B 侧向进入的趋势.产生的压强差即为

$$\Delta p_{AB}=-\frac{1}{2}P_AE_A-\left(-\frac{1}{2}P_BE_B\right)=\frac{1}{2}P_BE_B=\frac{1}{2}(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0E_BE_B=\frac{1}{2}(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\right)^2=\frac{\varepsilon_r-1}{2\varepsilon_0\varepsilon_r^2}\sigma^2 \tag{14}$$

第二个过程,从位置 B 移动到几乎等高的介质表层位置 C 时

$$\varepsilon_{pB}=-\frac{1}{2}P_BE_B \qquad \varepsilon_{pC}=-\frac{1}{2}P_CE_C$$

产生的压强差即为

$$\Delta p_{BC}=-\frac{1}{2}P_BE_B-\left(-\frac{1}{2}P_CE_C\right) \tag{15}$$

这里应该注意的是 P_C 和 E_C 的取值.此时分子团处在 E_0 的外场中受力,所以

$$E_C=E_0$$

我们考虑分子团整体的极化强度矢量.由于 $P=\chi_e\varepsilon_0E_0$ 的介质只在顶端一小块,可以忽略,大部分介质被 E 极化,故极化的主要的因素是 E 而非 E_0,即取

$$P_C=\chi_e\varepsilon_0E \tag{16}$$

故由于 C 点的电势能小于 B 点,则分子团有从 B 向 C 纵向上拱的趋势.代入后,即可得到

$$\begin{gathered}\Delta p_{BC}=\frac{1}{2}P_CE_C-\frac{1}{2}P_BE_B=\\ \frac{1}{2}\chi_e\varepsilon_0EE_0-\frac{1}{2}\chi_e\varepsilon_0EE=\\ \frac{1}{2}(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}-\frac{1}{2}(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\right)^2=\\ \frac{(\varepsilon_r-1)^2}{2\varepsilon_0\varepsilon_r^2}\sigma^2\end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered}\Delta p_{AC}=\Delta p_{AB}+\Delta p_{BC}=\\ \frac{\varepsilon_r-1}{2\varepsilon_0\varepsilon_r^2}\sigma^2+\frac{(\varepsilon_r-1)^2}{2\varepsilon_0\varepsilon_r^2}\sigma^2=\\ \frac{\varepsilon_r-1}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}\sigma^2=\frac{1}{2}P_CE_C\end{gathered} \tag{18}$$

根据受力平衡,有

$$h=\frac{\Delta p_{AC}}{\rho g}=\frac{\varepsilon_r-1}{2\varepsilon_0\varepsilon_r\rho g}\sigma^2 \tag{19}$$

3.3 关注始末状态运用伯努利方程求解法

我们也可以直接用伯努利方程解决问题.构造一个从 A 到平衡后最高点 D 的过程.满足

$$\begin{gathered}p_A+\rho gh_A+\frac{1}{2}\rho v_A^2-\frac{1}{2}P_AE_A=\\ p_D+\rho gh_D+\frac{1}{2}\rho v_D^2-\frac{1}{2}P_DE_D\end{gathered} \tag{20}$$

这里 p 的意义为由于水和大气压强所引起的总压强.由于 A 点贴近液体表面,则有

$$p_A\approx p_D=p_0$$

又由于 $v_A=v_D=0$,$P_C=P_D$,$E_C=E_D$,代入方程有

$$\rho g(h_D-h_A)=\frac{1}{2}P_DE_D=\frac{1}{2}P_CE_C \tag{21}$$

又 $h=h_D-h_A$,则

$$h=\frac{\frac{1}{2}P_CE_C}{\rho g}=\frac{\varepsilon_r-1}{2\varepsilon_0\varepsilon_r\rho g}\sigma^2 \tag{22}$$

4 结束语

运用电势能密度与推广后的伯努利方程解决电介质流体的平衡问题,为我们处理电介质问题提供了新的思路,为进一步推广伯努利方程提供了可行的范式.

参考文献

1 舒幼生.奥赛物理题选(第 3 版)[M].北京:北京大学出版社,2017.256

Application on Bernoulli Equation in Dielectric Fluid

Feng Zijiang Lu Bin

(Zhejiang Yuyao High School,Ningbo, Zhejiang 315400)

Abstract:In this paper, the concept of electric potential energy density is introduced and Bernoulli equation is extended,the polarization problem of dielectric fluid is solved by using this equation.

Key words: dielectric; electric dipole; non uniform electric field; Bernoulli equation