GeoGebra 在验证猜想中的应用

俞　翔　　李　更

（宁波市奉化区江口中学　浙江 宁波　315504）

（收稿日期：2021－04－07）

摘　要：对一道改编的试题应用等时圆规律进行分析，并尝试推理新规律，进行归纳的过程中，引起已有规律和新规律的“冲突”．对新规律进行了推理论证，猜想“冲突”的起因，借助 GeoGebra 软件对猜想进行动画模拟和数据分析，尝试解决“冲突”，以期拓展 GeoGebra 在现有文献中的应用．

关键词：GeoGebra　应用　等时圆　验证猜想

物理教师应用 GeoGebra 软件辅助教学的能力日渐娴熟，由《物理通报》近几年发表的文献可见微知萌，在 2017 至 2019 年共有文献 4 篇，2020 年有文献 6 篇，2021 年截至 4 月已有 4 篇．纵观这些文献，GeoGebra 多应用于物理场景的建立和疑难问题可视化的研究，如陈林老师借助 3D 绘图实现对电场电势的三维建构，艾亮老师利用微积分思想研究 $v-t$ 图像中的面积．现就一改编题，借助 GeoGebra 应用于对未知规律的探寻和验证．

1　等时圆模型的应用

【例题】 如图 1 所示，ad，bd，cd 是竖直面内 3 根固定的光滑细杆，a，b，c，d 位于同一圆周上．每根杆上都套着一个小滑环（图中未画出），3 个滑环分别从 a，b，c 处释放（初速为零），用 t_1，t_2，t_3 依次表示滑环到 d 所用时间，则（　　）

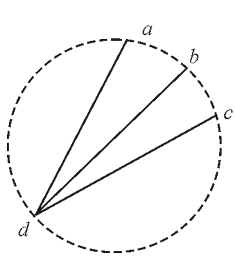

图 1　例题图

A. $t_1 < t_2 < t_3$　　B. $t_1 > t_2 > t_3$

C. $t_3 > t_1 > t_2$　　D. $t_1 = t_2 = t_3$

解析：鉴于 d 点并非圆周的最高点和最低点，要应用等时圆模型，需构建等时圆．以 d 点为圆周的最低点，过 b 点做圆，如图 2 所示．此圆与 ad 和 cd 轨道相交于 a' 和 c'，由等时圆模型的规律可知，若小滑环自 a'，b 和 c' 由静止开始下滑至 d 点所用的时间相等．从而可见，自 ad 下滑的时间 t_1 小于自 bd 下滑的时间 t_2．同理，自 bd 下滑的时间 t_2 小于自 cd 下滑的时间 t_3．所以，选项 A 正确．

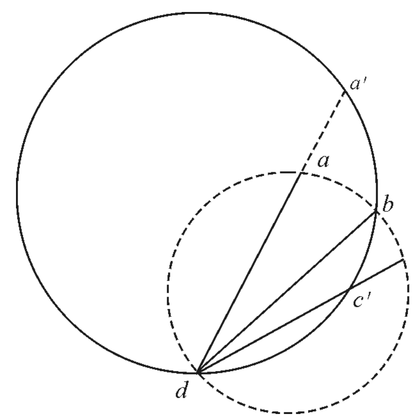

图 2　借助等时圆模型巧解例题

2　等时圆模型的拓展

由于题目中并未明确表明 d 点的位置，不妨将 d 点向下移动，如图 3 所示．

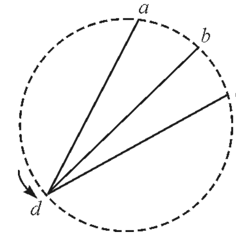

图 3　研究普适规律

移动 d 点并不会变更题目本意，即应有不变的结果 $t_1 < t_2 < t_3$．

证明如下：连接 Od，设 $\angle Oda$ 为 α，做水平辅助

线 df，设 $\angle fdO$ 为 β，如图 4 所示. 得 $\overline{ad}=2R\cos\alpha$，小滑环自 ad 轨道下滑的加速度为 $g\sin(\alpha+\beta)$，所以有

$$2R\cos\alpha=\frac{1}{2}g\sin(\alpha+\beta)t^2$$

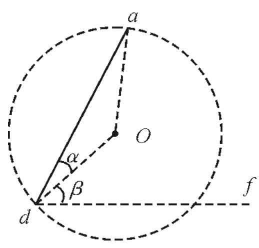

图 4　滑轨处于圆心侧上方

得

$$t=\sqrt{\frac{4R\cos\alpha}{g\sin(\alpha+\beta)}}=\sqrt{\frac{4R}{g(\tan\alpha\cos\beta+\sin\beta)}}$$

对于确定的 d 点而言，β 为定值，所以当 α 角度逐渐减小时，t 值增大.

如果 ad 弦低于圆心 O，如图 5 所示，则有

$$t=\sqrt{\frac{4R\cos\alpha}{g\sin(\beta-\alpha)}}=\sqrt{\frac{4R}{g(\sin\beta-\tan\alpha\cos\beta)}}$$

当 α 角度逐渐减大时，t 值仍增大.

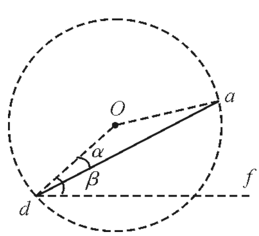

图 5　滑轨处于圆心侧下方

从而可见，只要落点 d 相同，开始下滑的位置越高，所用时间越小，即始终有 $t_1<t_2<t_3$，不妨暂称为“圆时间规律”.

3　问题的产生 猜想与论证

“圆时间规律”的结论 $t_1<t_2<t_3$ 和 d 点的位置无关. 那么，不妨继续下移 d 点(a，b，c 3 点位置不变)，直至移动到圆心的正下方，即圆周的最低点. 此时，等时圆模型突现，必有 $t_1=t_2=t_3$. 这和“圆时间规律”所得结论相冲突，其原因何在呢？

细细推敲等时圆模型的规律和“圆时间规律”均没有问题. 猜想在 d 点下移的过程中，尽管下滑的时间会变化，且各轨道所用时间 t_1，t_2，t_3 不等，但与之同时 t_1，t_2，t_3 之间的差值在逐渐减小.

为验证猜想，采用 GeoGebra 制作动画研究时间差. 做一个半径为 5 的圆，并按题设在圆周上取 a，b，d 点建立下滑轨道，设置顶角 γ 用以记录 d 点在圆周上位置的变化，d 点越接近于圆周最低点，角度 γ 越小. 借助 Length 指令获取两个轨道长度，借助角度工具获取斜面倾角. 利用匀变速运动公式计算下滑时间，并求时间差，如图 6 和表 1 所示.

$$t_1=\sqrt{\frac{2L_{ad}}{g\sin\theta_1}}=1.56\ \mathrm{s}\qquad t_2=\sqrt{\frac{2L_{bd}}{g\sin\theta_2}}=1.86\ \mathrm{s}$$

$$\Delta t=t_2-t_1=1.86\ \mathrm{s}-1.56\ \mathrm{s}=0.3\ \mathrm{s}$$

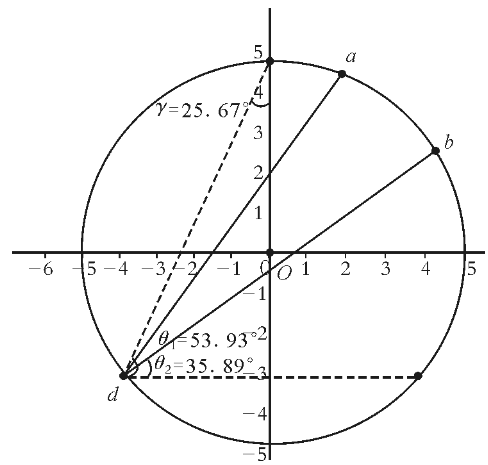

图 6　圆和轨道

表 1　通过软件获取研究所需数据

t_1/s	t_2/s	Δt/s	γ/(°)
1.719 886	2.620 149	0.900 263	45.000 0
1.667 195	2.326 697	0.659 501	39.870 0
1.647 897	2.232 091	0.584 194	37.710 0
1.626 191	2.132 288	0.506 097	35.077 5
1.606 168	2.045 651	0.439 483	32.445 0
1.585 723	1.961 902	0.376 179	29.542 5
1.565 004	1.881 319	0.316 315	26.370 0
1.542 520	1.798 184	0.255 664	22.657 5
1.522 674	1.728 103	0.205 429	19.147 5
1.502 872	1.660 917	0.158 045	15.435 0
1.479 037	1.583 264	0.104 227	10.710 0
1.458 234	1.518 032	0.059 798	6.390 0
1.437 766	1.455 890	0.018 124	2.002 5

(下转第 133 页)

正确处理问题加大了阻力.第三,只有建立坐标系才能将矢量式转化为分量式,用代数运算代替矢量运算.例如,在运用动量定理时,将冲力、冲量以及初、末动量与坐标系的正方向进行比较,确定它们应取的正负号,才可列出动量定理在某一方向的分量式,将矢量运算转化为代数运算.若学生没有形成“坐标系意识”,则无法透彻理解分量式的方向性,列式时往往容易出现随意添抹正、负号的现象.

综上所述,我们认为 $x-t$ 关系所体现的“位置-时间关系”是“坐标系意识”的反映,除运动学规律外,$x-t$ 关系本身还承载着更深刻的建立坐标系、精准描述物体位置的功用.因此,对“坐标系”作用的阐述绝不该一笔带过,反而应在质点运动学 $x-t$ 关系的学习过程中逐步渗透、深化理解.否则学生对质点运动学规律的理解就可能是片面或畸形的,同时还会为后续学习埋下隐患.这一点希望教学者能纳入考量.

参考文献

1　人民教育出版社,课程教材研究所,物理课程教材研究开发中心.普通高中教科书物理必修第一册[M].北京:人民教育出版社,2019.20

The Necessary of Restating the Essential Connotation of *Position-time Relationship*

——Also on the Hidden Worry of *Coordinate System Consciousness* Fading

Yang Zhendong　Gao Hanxuan

(College of Physics and Technology, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi　541004)

Abstract: In the current physics teaching, the practice of denoting displacement with symbol x has caused the concealment of the original connotation of "position", which often leads to students' confusion in teaching. The essence of "position-time relationship" is restated, and its function is pointed out by taking two practical problems as examples. The behavior of emphasizing "displacement" rather than "position" in teaching may lead to the danger of "coordinate system consciousness" fading, and discussed several hidden concerns.

Key words: coordinate system; linear motion; kinematic equation

(上接第 122 页)

在 d 点代数区设置其“增量”为 5,“速度”为 3 的情况下启动动画.观察 d 点下移过程中,不同轨道下滑的时间差,并借助“记录到表格”功能以获得数据列表.从数据清晰可见,伴随着 d 点的下移,γ 角趋向于零,t_1 与 t_2 的数值逐渐逼近,即 $\Delta t=t_2-t_1$ 趋向于零.

将动点 d 的“速度”降低到 0.1,以获取更多的数据,并在 GeoGebra 中以 Δt 为横坐标,γ 角(弧度值)为纵坐标创建点阵,如图 7 所示.由图 7 可见,在 d 点下移到最低点的过程中,通过不同轨道下滑的时间差趋向于零.

通过研究可知,若在圆周一侧取一位置略低的 d 点,作为斜面底边的端点,从圆周另一侧选取一些点作为光滑斜面的顶点,让物体自各顶点下滑,下滑的时间和各顶点到 d 之间的高度差有关,高度差越大,时间越小.其成立的条件是 d 点不能是圆周的最低点.

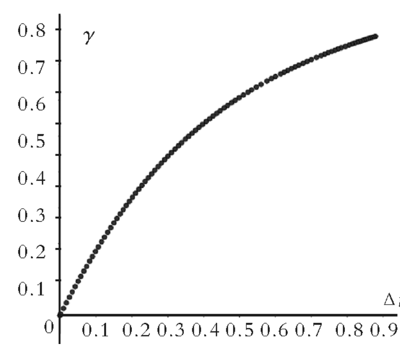

图 7　$\gamma-\Delta t$ 点阵

该测试题改编自 2004 年高考全国理综卷Ⅰ,原题中“d 点为最低点”,正确选项是 D.借助于 GeoGebra 的探究,也发现改编题默认 d 点为一侧点的做法略有不当,在试题中增加一条“d 点非最低点”的条件,让试题更为严谨.