

动力学中轻杆受力是否沿杆方向问题

钟艳雄

(兴宁市第一中学 广东 梅州 514500)

(收稿日期:2021-04-08)

摘要:对动力学中轻杆受力是否沿杆方向进行理论证明,并指出轻杆受力方向与轻杆在系统机械能传递之间的关系.

关键词:动力学 轻杆受力方向 切向力 径向力 机械能的传递

各种资料对动力学中轻杆受力是否沿杆方向的讨论几乎为零,加上讨论要用到刚体力学等理论,导致这个问题成了高中阶段的难题,一不留神还会出错,比如出现“轻杆受力只能沿杆方向”的错误说法,甚至把这样的错误说法当成结论,结果就会与“杆对物体的作用力可以任意方向”的结论相矛盾.轻杆受力不一定沿杆方向,下面通过实例和实际解决问题的方式进行分析.

实例一:如图1所示,长为 $2L$ 的轻杆可绕过其一端的水平光滑轴 O 在竖直平面内转动,分别在杆的中点和另一端各固定一质量为 m 的小球,把杆拉至水平无初速释放,不计空气阻力.问转动过程杆 L_1 受力是否沿杆方向.

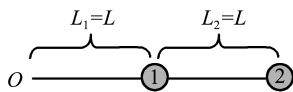


图1 实例一图

选整个系统为研究对象,以 O 为转轴,受力分析如图2所示.

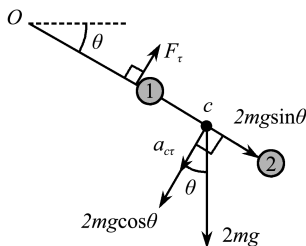


图2 实例一解题图

转动惯量为

$$I = mL^2 + m(2L)^2 = 5mL^2$$

设杆转过 θ 角时角加速度为 β ,由转动定理^[1]

$$3mgL\cos\theta = I\beta$$

以上两式解得

$$\beta = \frac{3g}{5L}\cos\theta$$

系统质心为杆 L_2 的中点 c ,设质心切向加速度为 $a_{c\tau}$,有

$$a_{c\tau} = \beta \frac{3}{2}L$$

以上两式解得

$$a_{c\tau} = \frac{9}{10}g\cos\theta$$

以两球及杆 L_2 为研究对象,质心仍为 c ,设杆 L_1 对球1的切向力为 F_{τ} ,由质心运动定理有

$$2mg\cos\theta - F_{\tau} = 2ma_{c\tau}$$

以上两式解得

$$F_{\tau} = \frac{1}{5}mg\cos\theta$$

结果表明,除杆在竖直位置外杆 L_1 受力均不沿杆方向.

以上用了刚体力学知识,下面用机械能守恒定律分析这个问题.

仍如图2所示,设杆转过 θ 角球1和球2速度分别为 v_1 和 v_2 ,由系统机械能守恒有

$$mgL\sin\theta + mg \cdot 2L\sin\theta = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

由两球角速度相等易知

$$v_2 = 2v_1$$

由以上两式解得

$$v_1^2 = \frac{6}{5}gL\sin\theta$$

设系统质心速度为 v_c , 由角速度 ω 相等有

$$\frac{v_1}{L} = \frac{v_c}{\frac{3}{2}L}$$

由以上两式解得

$$v_c^2 = \frac{27}{10}gL\sin\theta$$

上式两边对时间求导得

$$2v_c a_c = \frac{27}{10}gL\omega\cos\theta$$

易知

$$v_c = \omega \cdot \frac{3}{2}L$$

由以上两式解得

$$a_c = \frac{9}{10}g\cos\theta$$

对两球及杆 L_2 组成的系统, 由质心运动定理有

$$2mg\cos\theta - F_\tau = 2ma_c$$

以上两式解得

$$F_\tau = \frac{1}{5}mg\cos\theta$$

两次解得的结果完全相同.

本例中两个小球之间机械能传递依靠杆的切向弹力, 所以杆的弹力不沿杆方向. 切向弹力对球 1 做负功, 球 1 机械能减小, 对球 2 做正功, 球 2 机械能增加.

实例二: 如图 3 所示, 质量为 m 的小球 A, B 由长为 $2L$ 的轻杆相连, 竖直置于光滑水平面上, 由于受到轻微扰动, 系统在竖直平面内自由运动, 不计空气阻力. 求运动过程杆受力是否沿杆方向.

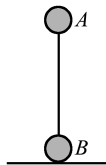


图 3 实例二图

如图 4 所示, B 的速度 v_B 沿水平方向, C 为系统质心, 由于系统受力均为竖直方向, 质心速度 v_c 和加速度 a_c 均为竖直方向. 杆转过 θ 角时 $v_B \perp BD$, $v_c \perp CD$, 说明 D 点是刚体瞬心, 设此时质心相对瞬心角速度为 ω , 则

$$v_c = \omega L \sin\theta \quad (1)$$

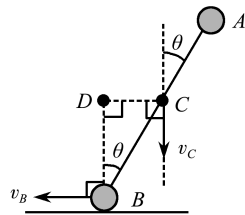


图 4 瞬心分析图

如图 5 所示, 以质心 C 为参考系, $F_{\text{惯}}$ 为 A 受到的惯性力, 有

$$F_{\text{惯}} = ma_c$$

设杆对球 A 切向力为 F_τ , 球 A 相对质心切向加速度为 a_τ , 由牛顿第二定律

$$mg\sin\theta - F_\tau - F_{\text{惯}}\sin\theta = ma_\tau$$

把 $F_{\text{惯}}$ 代入上式并化简

$$mg\sin\theta - F_\tau - ma_c\sin\theta = ma_\tau$$

$$F_\tau = mg\sin\theta - m(a_c\sin\theta + a_\tau) \quad (2)$$

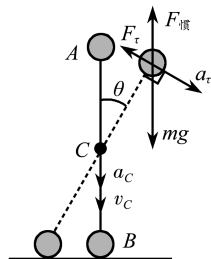


图 5 质心参考系解题图

球 A 绕质心做圆周运动, 设角加速度为 β , 有

$$a_\tau = \beta L \quad (3)$$

设系统绕质心转动惯量为 I_C , 有 $I_C = 2mL^2$, 刚体上任一点相对瞬心的角速度与刚体角速度相同, 因此刚体角速度为 ω . 由系统机械能守恒^[1]

$$mg \cdot 2L(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2} \cdot 2mv_c^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2$$

I_C 代入上式

$$mg \cdot 2L(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2} \cdot 2mv_c^2 + \frac{1}{2} \cdot 2mL^2\omega^2$$

上式两边对时间求导

$$g\omega L \sin\theta = v_c a_c + \beta\omega L^2$$

把式(1)代入上式

$$g\omega L \sin\theta = \omega L a_c \sin\theta + \beta\omega L^2$$

化简

$$g\sin\theta = a_c \sin\theta + \beta L$$

式(3)代入上式

$$g\sin\theta = a_c \sin\theta + a_\tau$$

上式代入式(2)

$$F_{\tau} = mg \sin \theta - m(a_c \sin \theta + a_{\tau}) = 0$$

说明杆若受力一定沿杆方向.

本例中两个小球之间机械能传递依靠杆的径向弹力,不需要切向弹力,所以杆的弹力沿杆方向,球 B 机械能增加,球 A 机械能减小.

实例三:如图 6 所示,竖直放置长为 L 的轻杆,上端连着质量为 m 的小球 A,杆的下端用铰链固接于水平面.置于同一水平面上的立方体 B 恰与 A 接触,立方体质量为 M .今有微小扰动,使杆向右倾倒,各处摩擦均不计,求 A 与 B 相互作用过程杆受力是否沿杆方向.

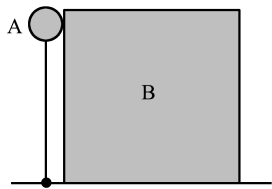


图 6 实例三图

各符号设置如图 7 所示,杆转过 θ 角的过程,由 A 和 B 系统机械能守恒有

$$mgL(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 \quad (4)$$

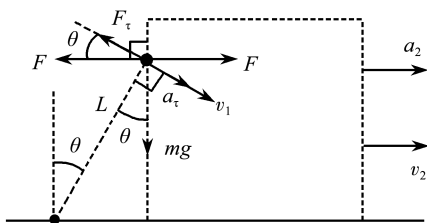


图 7 实例三解题图

式(4)两边对时间求导,并设球角速度为 ω ,切向加速度为 a_{τ} ,有

$$mg\omega L \sin \theta = mv_1 a_{\tau} + Mv_2 a_2$$

易知

$$v_1 = \omega L$$

$$v_2 = v_1 \cos \theta$$

联立以上 3 式解得

$$mg \sin \theta = ma_{\tau} + Ma_2 \cos \theta$$

以 B 为研究对象,由牛顿第二定律有

$$F = Ma_2$$

由以上两式

$$mg \sin \theta = ma_{\tau} + F \cos \theta$$

选 A 为研究对象,切向由牛顿第二定律有

$$mg \sin \theta - F \cos \theta - F_{\tau} = ma_{\tau}$$

由以上两式解得 $F_{\tau} = 0$

说明杆若受力一定沿杆方向.

本例中小球与铰链之间没有机械能传递,所以杆的弹力沿杆方向.

总结:通过以上 3 个实例的分析不难发现,轻杆弹力方向本质上是实现杆两端物体的机械能传递,若没有机械能传递则弹力沿杆方向,若有传递时,可以通过径向力传递,也可以通过切向力传递.

参考文献

- 1 赵凯华,罗蔚茵.新概念物理教程 力学(第 2 版)[M].北京:高等教育出版社,2004.174~186
- 2 肖长江,王晓磊,魏勇.基于 Matlab 的匀质摆杆所受转轴约束力分析[J].大学物理实验,2011,24(5):73~75
- 3 于志明.杆摆中横截面上的法向内力的力矩和功[J].连云港师范高等专科学校学报,2013,30(1):102~104

(上接第 87 页)

Constructing the Teaching Path of Physics Competition in Senior High School

—Taking Coriolis Force and Coriolis Acceleration as an Example

Lei Jingxian Gu Guofeng

(School of Physical Science and Technology, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi 541004)

Abstract: The new Coriolis force and Coriolis acceleration related content, so that students deeply understand the differences and connections between the two. It shows the core idea of teaching design which makes students understand the connotation of physics, cultivates students' physical thinking and implements the core quality of physics.

Key words: Coriolis force; Coriolis acceleration; understanding learning