单摆细线拉力随时间变化的图像辨析

唐保东

(南京市雨花台中学　江苏 南京　210012)

(收稿日期:2021－04－12)

摘　要:单摆模型中细线的拉力随时间做周期性变化,但是“$F-t$”图像具体是一个什么样的函数呢? 对这一问题进行了思考和解析,同时利用数学绘图软件进行绘制.

关键词:单摆　偏角　细线拉力　图像

1　提出问题

在今年 2 月份南京和盐城两市高三联合一模考试中,有这样一道试题:

【试题】如图 1(a)所示,O 点为单摆的固定悬点,$t=0$ 时刻摆球从 A 点开始释放,摆球将在竖直面内的 AC 之间做简谐运动,其中 B 点为运动中的最低位置,用力的传感器测得细线对摆球拉力 F 的大小随时间 t 变化的曲线如图 1(b)所示,F_m,F_n,t_0 均已知,重力加速度为 g,求:

(1)单摆的摆长 L;

(2)摆球的质量 m.

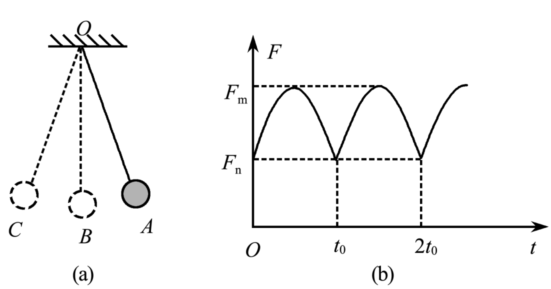

图 1　试题题图

这是一道比较常规的单摆运动规律与力学相结合的题目,题干呈现的图像看起来很像 $y=|\cos x|+k$ 的函数图像,并且在 nt_0 时刻突变,这与我们常见的单摆拉力随时间变化图像似乎有点不一样[1,2],到底哪个图像才是正确的呢?

2　讨论问题

首先,我们可以运用数学手段来证明,如图 2 所示,设 A 点细线偏角为 θ_0(即此单摆的最大摆角).

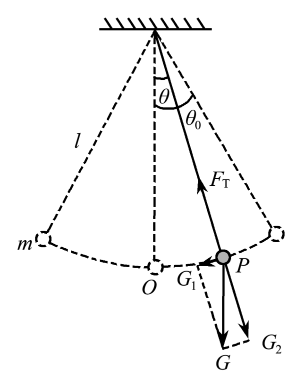

图 2　单摆受力分析

可知 t 时刻小球运动到 P 点时瞬时偏角

$$\theta=\theta_0\cos\omega t \tag{1}$$

其中 $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$. 从 A 到 P 点对小球运用动能定理得

$$mg(l\cos\theta-l\cos\theta_0)=\frac{1}{2}mv_P^2$$

解得

$$v_P^2=2gl(\cos\theta-\cos\theta_0) \tag{2}$$

故小球位于 P 点时细线拉力

$$F=mg\cos\theta+m\frac{v_P^2}{l}=$$

$$mg\cos\theta+m\frac{2gl(\cos\theta-\cos\theta_0)}{l}=$$

$$3mg\cos\theta-2mg\cos\theta_0 \tag{3}$$

将式(1)代入式(3),可得

$$F=3mg\cos(\theta_0\cos\omega t)-2mg\cos\theta_0$$

这个函数的图像是怎样的呢? 我们可以赋予一定的值,例如假定 $L=1$ m,$g=10$ m/s^2,$\theta=5°$,$m=0.1$ kg. 利用 GeoGebra 软件绘图,设置横纵坐标为 10∶1,可得图像如图 3 所示.

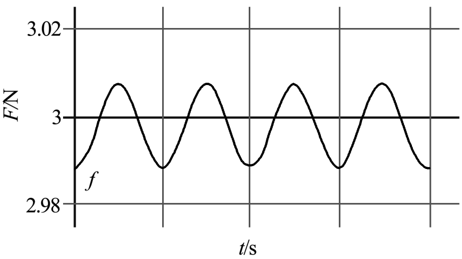

图 3　细绳拉力随时间变化图像

对比可见，图 3 与题目所给图像相差较大，为慎重起见，我们进一步思考：对函数

$$F=3mg\cos(\theta_0\cos\omega t)-2mg\cos\theta_0$$

求导可得

$$F'=3mg\,\omega\theta_0\sin\omega t\sin(\theta_0\cos\omega t)$$

无论 $t=0$ 或 $t=\dfrac{T}{4}$，导函数的值都为零，同样用 GeoGebra 软件绘制导函数 F' 的图像，可得图 4.

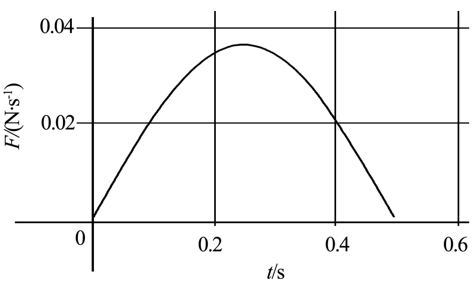

图 4　导函数随时间变化图像

在 $0<t<\dfrac{\pi}{2\omega}$ 区间，导函数的值先变大再变小，而题目所给图像在 0 到 $\dfrac{T}{4}$ 时间内单调递减，可见题干所呈现的图像是错误的.

3　明确结论

根据之前求解的结论，单摆拉力

$$F=3mg\cos\theta-2mg\cos\theta_0$$

其随摆角变化的图像是余弦函数与一项定值之差决定的，而 $\theta=\theta_0\cos\omega t$，$t=0$ 时，$\theta=\theta_0$，$F=F_n=mg\cos\theta_0$ 为最小值，以后随时间周期性变化，正确的图像应该如图 5 所示.

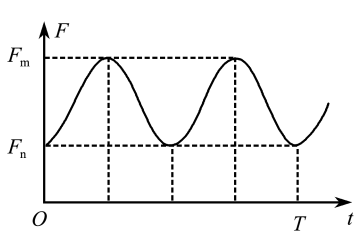

图 5　拉力随时间变化正确图像

4　拓展延伸

我们还可以用高等代数来证明单摆的周期公式及绳拉力随时间变化的图像.

单摆切向受力情况为 $-mg\sin\theta=ma$，其中 a 为切向加速度，左边取负号是考虑到回复力的方向与速度度方向总是相反. 再根据切向加速度和角加速度的关系 $a=\alpha r$ 可得

$$-mg\sin\theta=ml\alpha=ml\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

进一步整理该式可得

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0 \tag{1}$$

如何处理这个式子呢？有两个方法：

（1）根据泰勒展开式

$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots\cdots$$

当 θ 很小时 $\sin\theta\approx\theta$，此时式（1）可变形为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\theta=0 \tag{2}$$

这是一个二阶常系数齐次微分方程，形如

$$y''+py'+qy=0$$

存在通用解法，其特征方程为

$$x^2+\frac{g}{l}=0$$

解得

$$x=\pm\sqrt{\frac{g}{l}}\,\mathrm{i}$$

对照复数

$$Z=\alpha+\beta\mathrm{i}$$

可知

$$\alpha=0\qquad\beta=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

式（2）的通解为

$$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

即

$$\theta=\mathrm{e}^0\left(C_1\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)=$$

$$C_1\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

令 $\theta_0=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$，根据两角和的正弦公式可得

$$\theta=\theta_0\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\varphi\right)$$

其中 θ_0 中为最大摆角，初相位 $\sin\varphi=\dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$，并

由此得出单摆振动周期

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(2)利用微分换元法则

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\theta}=\theta'\cdot\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\theta}$$

故式(1)可变形为

$$\theta'\mathrm{d}\theta'+\frac{g}{l}\sin\theta\mathrm{d}\theta=0$$

两边同时取积分

$$\int_0^{\theta'}\theta'\mathrm{d}\theta'=-\frac{g}{l}\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

可得

$$\frac{1}{2}(\theta')^2=\frac{g}{l}\cos\theta\Big|_{\theta_0}^{\theta}$$

再整理可得

$$(\theta')^2=2\frac{g}{l}(\cos\theta-\cos\theta_0)\tag{3}$$

这时可换一个方法求解单摆摆动过程中细线拉力

$$F=mg\cos\theta+m\omega^2 l=mg\cos\theta+m(\theta')^2 l\tag{4}$$

将式(3)代入式(4)同样可得

$$F=3mg\cos\theta-2mg\cos\theta_0$$

这里很多知识显然已经超出了高考的要求，但是作为物理教师把这些问题思考清楚还是十分必要的，一来教学上必须以己昭昭方可使人昭昭，二来在出试卷时避免出现一些科学性错误.

参 考 文 献

1　谭志中.求大摆角单摆周期近似解的“局部常化”方法[J].大学物理，2005，12(24)：14～17

2　林志萍，张欣.就单摆问题引入大学物理教学新模式[J].物理通报，2020(1)：21～24

(上接第 32 页)

Practical Research on the Integration of Conceptual Teaching Content Based on the Development of Students′ Scientific Thinking

——Taking the Teaching Content of *Quantitatively Explore the Magnitude of Ampere Force to Define Magnetic Induction Intensity* as an Example

Xiang Xinlei　Sun Yue

(Beijing No.101 Middle School，Beijing　100092)

Li Junpeng

(Beijing Haidian Teachers Training College，Beijing　100195)

Shi Lei

(Qingdao West Coast New District No. 1 Senior High School，Qingdao，Shandong　266555)

Abstract：With the in－depth advancement of new curriculum standards and new textbooks，the meaning of core literacy and how to implement it has attracted more and more attention and thinking from educators. Scientific thinking is the core content of core literacy in physics，and the integration of conceptual teaching content can be very effective. Promote the development of students' scientific thinking ability. This article reintegrates the two sections of the textbook "Magnetic induction" and "The force received by the energized wire in the magnetic field" through in－depth exploration of the textbook，and conducts the ampere force from the perspective of experimental innovation Quantitative exploration and the definition of the abstract concept of "magnetic induction" from the mechanical dimension of the magnetic field have broken through the difficulties of teaching.

Key words：core literacy；physics concept；integration of teaching content