关于 Kane 难题的一种解决方案

张九铸
（金昌市龙门学校　甘肃 金昌　737100）

（收稿日期：2021-04-27）

摘　要：两个刚体的摩擦碰撞，存在所谓Kane难题，即有时算出的系统动能损失为负. 文章指出，这是由于问题给出的运动学条件、几何条件、动摩擦因数和恢复系数，往往不足以确定刚体在碰撞过程各阶段的受力或各力关系，甚至库仑摩擦定律不再适用. 鉴于此，引入了“切向恢复系数 k” 概念，即二碰撞点的最终切向相对速度与初始切向相对速度之比，导出了针对两个做平面平行运动的刚球在碰撞过程中的动能损失计算式，据此及能量守恒定律给出了 k 值的范围及物理意义，避免了动能损失小于零的结果.

关键词：Kane 难题　碰撞　动能损失　切向恢复系数

1　引言

如图 1 所示，质量为 m_1，半径为 r_1 的均质刚性球壳绕其直径的转动惯量为 J_1，与刚性水平面进行斜碰. 碰撞之初，球壳的质心速度为 $\boldsymbol{V}_{01}$，与竖直的 Oy 轴负向的夹角为 α，角速度 $\boldsymbol{\omega}_{01}$ 沿逆时针方向. 球壳与水平面之间的碰撞恢复系数为 e. 再设上述各量能够保证：球壳碰撞点的水平初速度为 $v_{0x} > 0$，球壳在整个碰撞过程中受到方向不变的动摩擦力且该力满足库仑摩擦定律，动摩擦因数为 f_d. 由平面运动刚体动力学方程及恢复系数定义有

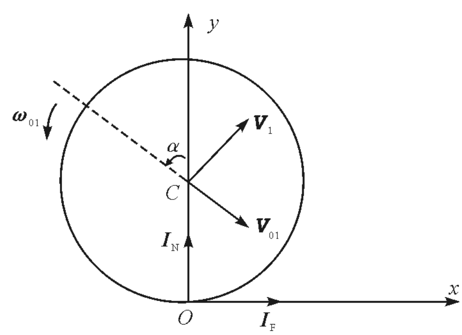

图 1　刚性球壳与刚性平面之间的碰撞

$$-f_d I_N = m_1 V_{1x} - m_1 V_{01} \sin\alpha \tag{1}$$

D. 落地点在抛出点西侧

基于题目的已知条件，可以分析出 D 为正确选项.

目前高考题越来越灵活、新颖，背景知识也越来越广阔. 对于很多平时善于思考、勇于拓展和学习相关课外知识、努力提升综合能力的学生，在高考中面对以课本上没有出现过的知识为背景的试题时，无论见过与否，有了平时的历练和素养，会更快、更容易地做出结果.

6　结束语

在北半球，河流右岸的冲刷甚于左岸，右岸相对陡峭；火车铁轨的右轨所受到的压力大于左轨，因而磨损相对严重[2]；夏秋之际，在我国东南沿海经常出现的台风，是逆时针流动的气旋. 南半球的情况刚好相反. 这些现象与落体偏东现象，背后都是科里奥利力在起作用.

在中学阶段，了解科里奥利力的意义不仅仅是为了掌握多少知识，更重要的是拓展学生科学视野，激发学习兴趣，培养勇于探索的科学精神.

参 考 文 献

1　人民教育出版社，课程教材研究所，物理课程教材研究开发中心. 普通高中物理·必修 1(第 2 版)[M]. 北京：人民教育出版社，2006. 42 ~ 44

2　周衍柏. 理论力学(第 2 版)[M]. 北京：高等教育出版社，1986. 254 ~ 257

3　程稼夫. 中学奥林匹克竞赛物理教程(第 2 版)[M]. 合肥：中国科技大学出版社，2013. 109 ~ 111

$$I_N = m_1 V_{1y} - m_1(-V_{01}\cos\alpha) \tag{2}$$

$$-r_1 f_d I_N = J_1\omega_1 - J_1\omega_{01} \tag{3}$$

$$e = -\frac{V_{1y} - 0}{-V_{01}\cos\alpha - 0} \tag{4}$$

其中 I_N 是球壳在整个碰撞过程中受到的支持力的冲量，V_1 和 $\boldsymbol{\omega}_1$ 分别是球壳在碰撞过程末的质心速度和角速度，各矢量方向如图 1 所示. 联立以上 4 式，可得到

$$V_{1x} = V_{01}[\sin\alpha - f_d(1+e)\cos\alpha] \tag{5}$$

$$\omega_1 = \frac{V_{01}}{r_1}\left[a - \frac{3}{2}f_d(1+e)\cos\alpha\right] \tag{6}$$

其中

$$a = \frac{\omega_{01} r_1}{V_{01}}$$

系统在碰撞过程中的动能损失为

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}m_1\{V_{01x}^2 + (-V_{01}\cos\alpha)^2 - [V_{1x}^2 + e^2(V_{01}\cos\alpha)^2]\} + \frac{1}{2}J_1(\omega_{01}^2 - \omega_1^2) = (1-e^2)\frac{1}{2}m_1(-V_{01}\cos\alpha)^2 + \frac{1}{2}m_1(V_{01x}^2 - V_{1x}^2) + \frac{1}{2}J_1(\omega_{01}^2 - \omega_1^2) \tag{7}$$

将式(5)，式(6) 代入式(7)，得到

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}m_1 V_{01}^2\left\{-[\sin\alpha - f_d(1+e)\cos\alpha]^2 - \left[e^2 + \frac{3}{2}f_d^2(1+e)^2\right]\cos^2\alpha + 1 + 2af_d(1+e)\cos\alpha\right\} \tag{8}$$

取具体数值 $\alpha = 30°$，$e = 0.7$，$f_d = 0.4$，$a = 0.30$. 将这些数值代入式(8)，算得 $\Delta E_k < 0$，这显然不符合能量守恒定律. 出现此类结果的问题称为 Kane 难题[1].

上述问题中的运动初始条件是合理的，解答过程中所用其他定理和公式也是合适的，故 Kane 难题产生的原因，只能是用库仑摩擦定律 $I_f = f_d I_N$ 将法向冲量大小 I_N 和动摩擦力冲量大小 I_f 联系起来这一点，进一步讲，仅由上述运动学条件(V_{01}，α，ω_{01})、几何条件(r_1)、动摩擦系数 f_d 和恢复系数 e 这 6 个量无法确定球壳碰撞过程各阶段的受力或各力之间关系，当然也无法保证球壳在碰撞过程中始终受的是满足库仑摩擦定律 $F_\tau = f_d F_N$ 的动摩擦力. 实际上，在碰撞过程各阶段，球壳与水平面之间的接触力比较复杂. 比如两个弹性球体的碰撞，且接触面是一个圆面，如图 2 所示.

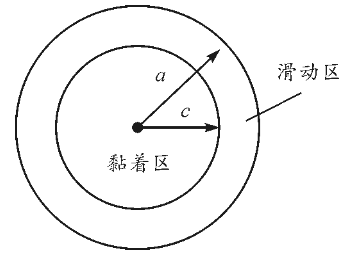

图 2　两个弹性球之间的存在切向力时的接触面

则碰撞过程中某些阶段还可能出现这种情况：两球之间的总法向力大小根据赫兹分布[2] 应为

$$F_N = \frac{2}{3}p_0\pi a^2 \tag{9}$$

而接触面之间的总切向力可用公式[2]

$$F_\tau = -\frac{2\pi}{3a}f_d p_0(a^3 - c^3) \tag{10}$$

计算. 以上二式中的 a 为接触面半径，c 为黏着区(该区域内，两球之间因分子间范德瓦耳斯力而相互吸引) 半径，$c < a$，如图 2 所示；p_0 是接触面中心处的压强. 但是，利用以上二式和 V_{01}，α，ω_{01}，r_1，f_d，e 这 6 个量，我们仍然无法通过有关动力学规律导出只含这 6 个量的动能损失 ΔE_k 的表达式. 因为，仅由这 6 个量无法算出 p_0 和碰撞各阶段的 a 和 c，也就无法通过以上二式算出碰撞各阶段的 F_N 和 F_τ.

鉴于此，笔者建议，仿照针对二碰撞点沿二刚体公法线的运动我们定义了可通过实验测定的恢复系数 e，现在也可以定义一个绝对值小于等于 1 的并且也可以通过实验测定的“切向恢复系数 k”，即二碰撞点的切向相对末速度与切向相对初速度之比. 诚然，由式(10) 和式(1)、(3) 可知，式(7) 中必然有

$$V_{1x} \leqslant V_{01x}$$

$$\omega_1 \leqslant \omega_{01}$$

即 ΔE_k 一定大于等于零. 而由以上二式得到

$$V_{1x} + r_1\omega_1 \leqslant V_{01x} + r_1\omega_{01}$$

即圆球碰撞点的初、末速度满足

$$k = \frac{v_{1x}}{v_{01x}} \leqslant 1$$

为不失一般性，以下我们导出两个作平面运动的刚性球碰撞过程中的、含参量 k 的动能损失计算式，继而找出关于 k 值的满足能量守恒定律的范围.

2　动能定理的一种形式

设质点系中第 i 个质点的质量为 m_i，其在 $\mathrm{d}t$ 时间内的初、末速度分别为 $\boldsymbol{v}_{0i}$ 和 $\boldsymbol{v}_i$，合力(包括系统的内力和外力)的冲量为 $I_{i合}$，则由质点动量定理，有

$$m_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_{0i}) = \boldsymbol{I}_{i合}$$

先用 $\boldsymbol{v}_i$ 标乘上式，再用 $\boldsymbol{v}_{0i}$ 标乘上式，然后将两个结果相加，得到

$$m_i\boldsymbol{v}_i^2 - m_i\boldsymbol{v}_{0i}^2 = I_{i合} \cdot (\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_{0i}) \tag{11}$$

将质点系中所有质点的相似方程相加，得到系统的动能损失为

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{I}_i \cdot (\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_{0i}) \tag{12}$$

上式中 $\boldsymbol{I}_i$ 已不再含有 m_i 所受系统的内力.

现在将式(12)运用于两个始终做平面运动的刚体的碰撞，且设只有一对碰撞点，如图 3 所示.

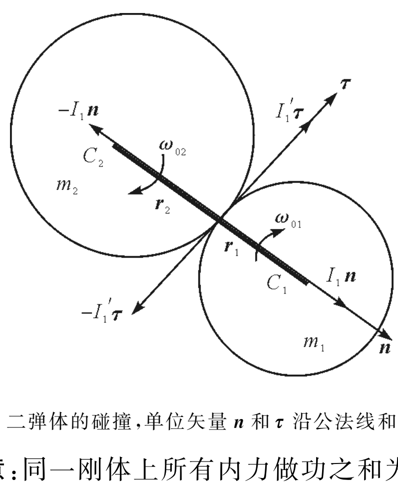

图 3　二弹体的碰撞，单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 沿公法线和公切面

注意：同一刚体上所有内力做功之和为零，故式(12)右端这时只针对两个碰撞点. 设碰撞初，二刚体角速度分别为 $\boldsymbol{\omega}_{01}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_{02}$，二碰撞点速度分别为 $\boldsymbol{v}_{01}$，$\boldsymbol{v}_{02}$；碰撞末，二刚体的角速度分别为 $\boldsymbol{\omega}_1$ 和 $\boldsymbol{\omega}_2$，二碰撞点速度分别为 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$；碰撞中二碰撞点受到的法向冲量分别为 $I_1\boldsymbol{n}$ 和 $-I_1\boldsymbol{n}$，切向冲量分别为 $I_1'\boldsymbol{\tau}$ 和 $-I_1'\boldsymbol{\tau}$，其中 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 分别为法向单位矢量和切向单位矢量. 则由式(12)得到

$$\begin{aligned} 2\Delta E_{\mathrm{k}} &= -(I_1\boldsymbol{n} + I_1'\boldsymbol{\tau}) \cdot (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_{01}) + \\ &(I_1\boldsymbol{n} + I_1'\boldsymbol{\tau}) \cdot (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_{02}) = \\ &-I_1[(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) \cdot \boldsymbol{n} + (\boldsymbol{v}_{01} - \boldsymbol{v}_{02}) \cdot \boldsymbol{n}] - \\ &I_1'[(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) \cdot \boldsymbol{\tau} + (\boldsymbol{v}_{01} - \boldsymbol{v}_{02}) \cdot \boldsymbol{\tau}] \end{aligned} \tag{13}$$

3　两个均质刚球在碰撞过程中的动能损失

研究两个均质刚球的摩擦碰撞，如图 3 所示. 定义法向恢复系数、切向恢复系数分别为

$$e = -\frac{v_{1\mathrm{n}} - v_{2\mathrm{n}}}{v_{01\mathrm{n}} - v_{02\mathrm{n}}} \qquad k = \frac{v_{1\tau} - v_{2\tau}}{v_{01\tau} - v_{02\tau}} \tag{14}$$

代入式(13)，消去其中的末速度，得到

$$\begin{aligned} 2\Delta E_{\mathrm{k}} &= -I_1(1-e)(v_{01\mathrm{n}} - v_{02\mathrm{n}}) - \\ &I_1'(1+k)(v_{01\tau} - v_{02\tau}) \end{aligned} \tag{15}$$

先求 I_1. 设在碰撞过程中，球 1 质心的初、末速度分别为 $\boldsymbol{V}_{01}$ 和 $\boldsymbol{V}_1$，球 2 质心的初、末速度分别为 $\boldsymbol{V}_{02}$ 和 $\boldsymbol{V}_2$，系统的折合质量为 μ，则由两体运动动量定理，在 $\boldsymbol{n}$ 方向上有

$$I_1 = \mu(v_{1\mathrm{n}} - v_{2\mathrm{n}}) - \mu(v_{01\mathrm{n}} - v_{02\mathrm{n}})$$

再用式(14)第一式将其改写为

$$I_1 = -\mu(1+e)(v_{01\mathrm{n}} - v_{02\mathrm{n}}) \tag{16}$$

再求 I_1'. 由质心系中的角动量定理，对二刚球分别有

$$\omega_1 - \omega_{01} = \frac{r_1 I_1'}{J_1}$$

$$\omega_2 - \omega_{02} = -\frac{r_2 I_1'}{J_2}$$

其中 J_1，J_2 分别是两个圆球对各自直径的转动惯量. 以上二式分别乘以 r_1，r_2，变为

$$\begin{aligned} \omega_1 r_1 - \omega_{01} r_1 &= \frac{r_1^2 I_1'}{J_1} \\ \omega_2 r_2 - \omega_{02} r_2 &= -\frac{r_2^2 I_1'}{J_2} \end{aligned} \tag{17}$$

由质心运动定理，二刚球在 $\boldsymbol{\tau}$ 方向上分别有

$$\begin{aligned} V_{1\tau} - V_{01\tau} &= \frac{I_1'}{m_1} \\ V_{2\tau} - V_{02\tau} &= -\frac{I_1'}{m_2} \end{aligned} \tag{18}$$

将式(17)第一式与式(18)第一式相加，将式

(14) 第二式与式(18) 第二式相加,且考虑

$$V_{1\tau} + \omega_1 r_1 = v_{1\tau}$$

$$V_{01\tau} + \omega_{01} r_1 = v_{01\tau}$$

$$V_{2\tau} + \omega_2 r_2 = v_{2\tau}$$

和

$$V_{02\tau} + \omega_{02} r_2 = v_{02\tau}$$

分别得到

$$v_{1\tau} - v_{01\tau} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{r_1^2}{J_1}\right) I_1'$$

$$v_{2\tau} - v_{02\tau} = -\left(\frac{1}{m_2} + \frac{r_2^2}{J_2}\right) I_1'$$

两式相减,并且利用式(14) 第二式,且令

$$c = \frac{1}{\dfrac{r_1^2}{J_1} + \dfrac{r_2^2}{J_2} + \dfrac{1}{\mu}} \tag{19}$$

得到

$$I_1' = c(k-1)(v_{01\tau} - v_{02\tau}) \tag{20}$$

将式(16)、(20) 代入式(15),得到

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\mu(1-e^2)(v_{01n} - v_{02n})^2 + \frac{1}{2}c(1-k^2)(v_{01\tau} - v_{02\tau})^2 \tag{21}$$

4 k 值的范围及物理意义

由式(21) 可知:因为 $0 \leqslant e \leqslant 1$,所以,要恒有 $\Delta E_k \geqslant 0$,则 k 值必须满足

$$-1 \leqslant k \leqslant 1 \tag{22}$$

式(22) 是式(21) 成立的必要条件,即式(22) 是能量守恒对 k 值的限制结果.我们以二刚体沿 $\boldsymbol{n}$ 方向做对心的完全弹性($e=1$) 碰撞的情形为例,来考查式(22) 的物理意义.当 $k=1$ 时,由式(14) 第二式,这表示碰撞过程中二碰撞点在 $\boldsymbol{\tau}$ 方向上的相对速度不变,即二圆球在碰撞中不受切向力,当然有 $\Delta E_k = 0$.当 $k=0$ 时,二碰撞点在 $\boldsymbol{\tau}$ 方向上的末相对速度为零,这类似于 $\boldsymbol{n}$ 方向上的完全非弹性碰撞,这时 ΔE_k 最大.当 $k=-1$ 时,表示二碰撞点在 τ 方向上的末相对速度与初相对速度等大而反向,这说明二圆球之间的切向力保证了二碰撞点在 $\boldsymbol{\tau}$ 方向上无相对运动,且该方向上的碰撞过程类似于 $\boldsymbol{n}$ 方向上的完全弹性碰撞,故

$$\Delta E_k = 0$$

参 考 文 献

1 刘延柱.关于摩擦碰撞的 Kane 难题[J].力学与实践,2012,34(1):91 ~ 94

2 瓦伦丁 L 波波夫.接触力学与摩擦学的原理及其应用[M].李强,雒建斌,译.北京:清华大学出版社,2011.46,87

3 张九铸.平面运动刚体的恢复系数公式推导[J].大学物理,2009,28(8):23 ~ 24

A Solution Scheme to Kane Difficult Question

Zhang Jiuzhu

(Longmen School of Jinchang City,Jinchang,Gansu 737100)

Abstract: For the collision of two rigid bodies with friction between them, there is the so called Kane problem, i.e., sometimes the kinetic energy loss of the system calculated is negative. This paper points out that it is because the kinematic conditions, geometric conditions, dynamic friction coefficient and restitution coefficient given in the problem are often not enough to determine the force or the relationship between the forces in each stage of the collision process, and even Coulomb's law of friction sometimes doesn't apply at all. In view of this, this paper introduces the concept of "tangential coefficient of restitution k", which is the ratio of the final tangential relative velocity to the initial tangential relative velocity of the two collision points, and derives the formula of the kinetic energy loss in the collision process for two spheres moving in parallel. Based on this and the energy conservation law, the value range of k is given to avoid the result where the kinetic energy loss is less than zero.

Key words: Kane problem; collision; kinetic energy loss; tangential recovery coefficient