

介观平行板电容器间带电微粒的透射问题*

吴仍来

(惠州学院电子信息与电气工程学院 广东 惠州 516007)

肖世发

(岭南师范学院物理科学与技术学院 广东 湛江 524048)

杨昌彪

(岭南师范学院附属中学 广东 湛江 524048)

(收稿日期:2021-05-02)

摘要:基于量子力学中的薛定谔方程,探讨带电粒子克服势垒穿透介观平行板电容器的问题,分析了带电粒子贯穿平行板电容器的概率随入射粒子的能量、质量、入射粒子在电容器两极板上的电势能差值和两平行板间的距离等因素的变化情况.

关键词:介观平行板电容器 薛定谔方程 透射系数

1 引言

平行板电容器模型如图1所示.平行板电容器作为通交流阻直流的元器件,在电子线路以及生产和生活中应用非常普遍.在高中物理中,也经常碰到带电粒子在平行板电容器间运动的问题.平行板电容器之间充满均匀电场,处于其间的带电粒子可以认为受到一个稳恒力的作用,因此带电粒子的运动问题往往简化为匀加速和匀减速的运动.从经典力学的角度,当带电粒子的初始动能小于两极板间的电势差所带来的电势能 U_0 ,则带电粒子不能到达右极板.但是经典力学只适用于宏观粒子低速运动问题的求解.随着进一步的学习,我们会逐渐接触到纳米器件,电容器作为基本元器件,其尺寸小到纳米量级时,带电粒子在其中的运动问题该如何求解,此时我们就需要引入量子力学方法^[1,2].本文通过构建模型、构造势垒、量子理论求解的方法分析了带电粒子克服反向电场,穿透介观平行板电容器问题,探究了平行板电容器通交流阻直流的特性受量子隧穿效应的影响.

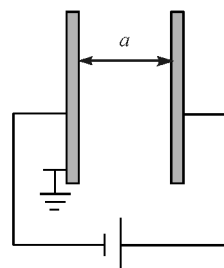


图1 平行板电容器模型

2 理论模型和求解

如图1所示,电容器的两平行板之间的距离为 a ,电压为 V .考虑带电量为 $+q$ 的粒子从电容器的左极板入射, $U_0=qV$ 为入射粒子在电容器两极板上的电势能差值.两极板会给带电粒子施加与运动方向相反的电场力,阻碍带电粒子到达右极板.将粒子在整个一维空间的电势能分为3个区域:Ⅰ区($x < 0$),Ⅱ区($0 \leq x \leq a$),Ⅲ区($x > a$),根据图2所示的势垒分布图,电势能的空间分布函数可表示为

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (\text{Ⅰ区}) \\ fx & (\text{Ⅱ区}) \\ 0 & (\text{Ⅲ区}) \end{cases} \quad (1)$$

* 惠州学院校级项目,项目编号2020JB009;广东省教学质量与教学改革工程项目——理工科,项目编号:20171117;广东省教育科研“十三五”规划2019年度教育科研重点课题,课题批准号:2019ZQJK050

作者简介:吴仍来(1986-),男,博士,讲师,主要从事大学物理专业教学科研工作.

其中 $f = \frac{U_0}{a}$. 该文只考察电子运动后透射到电容器右极板上的概率, III 区的势能不会影响电子在 II 区的透射几率, 为了计算方便, 此处设 III 区势能为零. 根据量子理论, 描述带电粒子运动的波函数满足薛定谔方程^[1,2], 即

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + U(x) \Psi(x) = E \Psi(x) \quad (2)$$

式中 m 为带电粒子的有效质量, \hbar 为普朗克常量, E 为带电粒子的本征能量, $\Psi(x)$ 为本征波函数.

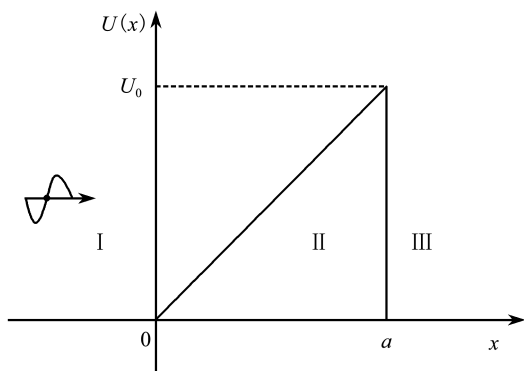


图2 平行板电容器势垒分布图

在 I 区和 III 区, 带电粒子的波函数均满足

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} = E \Psi(x) \quad (3)$$

令 $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, 式(3)可简化为

$$\frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + k^2 \Psi(x) = 0 \quad (4)$$

则 I 区波函数的通解可表示为

$$\Psi_I(x) = A_I e^{ikx} + B_I e^{-ikx} \quad (5)$$

其中, A_I 和 B_I 为待定系数, $A_I e^{ikx}$ 表示带电粒子的入射波函数, $B_I e^{-ikx}$ 表示带电粒子的反射波函数.

同理, III 区带电粒子的波函数可表示为

$$\Psi_{III}(x) = A_{III} e^{ikx} \quad (6)$$

上式中 A_{III} 为 III 区波函数的待定系数, 波函数只包含 $A_{III} e^{ikx}$ 表示穿透平行板电容器后, 带电粒子在 III 区不会再有反射, 只能向右运动.

在 II 区, 带电粒子的波函数满足

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi_{II}(x)}{dx^2} + fx \Psi_{II}(x) = E \Psi_{II}(x) \quad (7)$$

令 $\kappa = \left(\frac{2mf}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\xi = \frac{\kappa}{f}(fx - E)$, 式(7)可简化为

$$\frac{d^2 \Psi_{II}(\xi)}{d\xi^2} - \xi \Psi_{II}(\xi) = 0 \quad (8)$$

上式为 Airy 方程^[3,4], 其解为第一类艾里函数 $\text{Ai}(\xi)$ 和第二类艾里函数 $\text{Bi}(\xi)$ 的线性组合

$$\Psi_{II}(\xi) = A_{II} \text{Ai}(\xi) + B_{II} \text{Bi}(\xi) \quad (9)$$

式中 A_{II} 和 B_{II} 为 II 区带电粒子波函数的待定系数.

随后根据边界条件求待定系数间的关系. 波函数有两个边界, 分别在 $x=0, x=a$ 处. 在 $x=0$ 处, 根据波函数及其一阶导数连续, 有

$$A_I + B_I = A_{II} \text{Ai}(\xi_I) + B_{II} \text{Bi}(\xi_I) \quad (10)$$

$$ikA_I - ikB_I = \kappa A_{II} \text{Ai}'(\xi_I) + \kappa B_{II} \text{Bi}'(\xi_I) \quad (11)$$

上两式中, $\xi_I = -\frac{\kappa E}{f}$ 对应 $x=0$ 时 ξ 的取值. $\text{Ai}'(\xi_I)$ 和 $B_{II} \text{Bi}'(\xi_I)$ 分别表示第一类和第二类艾里函数的一阶导数在 ξ_I 处的取值. 在 $x=a$ 处, 根据波函数及其一阶导数连续, 有

$$A_{III} e^{ika} = A_{II} \text{Ai}(\xi_{II}) + B_{II} \text{Bi}(\xi_{II}) \quad (12)$$

$$ikA_{III} e^{ika} = \kappa A_{II} \text{Ai}'(\xi_{II}) + \kappa B_{II} \text{Bi}'(\xi_{II}) \quad (13)$$

在式(12)和式(13)中, $\xi_{II} = \frac{\kappa a - \kappa E}{f}$, 对应 $x=a$ 时 ξ 的取值. 令 $u = \text{Ai}(\xi_I), \sigma = \text{Bi}(\xi_I), u' = \text{Ai}'(\xi_I), \sigma' = \text{Bi}'(\xi_I), c = \text{Ai}(\xi_{II}), d = \text{Bi}(\xi_{II}), c' = \text{Ai}'(\xi_{II}), d' = \text{Bi}'(\xi_{II})$. 式(10)~(13)可分别简化为

$$A_I + B_I = uA_{II} + \sigma B_{II} \quad (14)$$

$$ikA_I - ikB_I = \kappa u' A_{II} + \kappa \sigma' B_{II} \quad (15)$$

$$A_{III} e^{ika} = cA_{II} + dB_{II} \quad (16)$$

$$ikA_{III} e^{ika} = \kappa c' A_{II} + \kappa d' B_{II} \quad (17)$$

利用 ik 乘以式(16)再减去式(17)得

$$A_{II} = -\frac{\beta}{\alpha} B_{II} \quad (18)$$

上式中 $\alpha = \kappa c' - ikc, \beta = \kappa c' - ikd$. 将式(18)代入式(17)得

$$B_{II} = \frac{ikc - \kappa c'}{\kappa(cd - c'd)} e^{ika} A_{III} = -\frac{\pi \alpha}{\kappa} e^{ika} A_{III} \quad (19)$$

上式中利用了艾里函数满足的朗斯基行列式

$$W[\text{Ai}(\xi), \text{Bi}(\xi)] = \begin{vmatrix} \text{Ai}(\xi) & \text{Bi}(\xi) \\ \text{Ai}'(\xi) & \text{Bi}'(\xi) \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi}$$

即有 $u\sigma' - u'\sigma = \frac{1}{\pi}, cd' - c'd = \frac{1}{\pi}$. 利用 ik 乘以式(14)再加上式(15)得

$$2ikA_{\perp} = (iku + \kappa u')A_{\parallel} + (ik\sigma + \kappa\sigma')B_{\parallel} \quad (20)$$

式(18)代入式(20)得

$$2ikA_{\perp} = \frac{\alpha(ik\sigma + \kappa\sigma') - \beta(iku + \kappa u')}{\alpha} B_{\parallel} \quad (21)$$

将式(19)代入式(21)得

$$2ikA_{\perp} = -\frac{\alpha(ik\sigma + \kappa\sigma') - \beta(iku + \kappa u')}{\alpha} \pi e^{iak} A_{\parallel} \quad (22)$$

整理式(22)可得

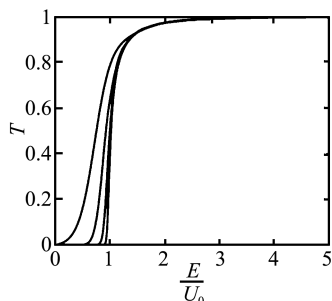
$$\frac{A_{\parallel}}{A_{\perp}} = \frac{1}{\pi} \frac{-2ik\kappa e^{-iak}}{\alpha(ik\sigma + \kappa\sigma') - \beta(iku + \kappa u')} \quad (23)$$

由式(23)可得带电粒子穿透电容器的透射系数

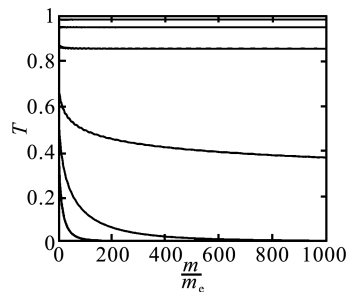
$$T = \left| \frac{A_{\parallel}}{A_{\perp}} \right|^2 = \frac{1}{\pi^2} \frac{4\kappa^2 k^2}{|\alpha(ik\sigma + \kappa\sigma') - \beta(iku + \kappa u')|^2} \quad (24)$$

3 数值计算与分析

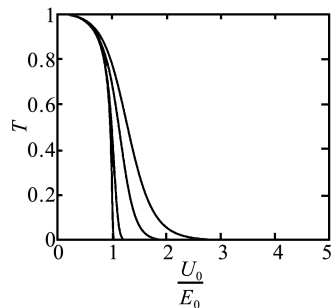
基于式(24),下面通过数值求解画出透射系数随各种参数的变化情况.图3(a)给出透射系数随带电粒子能量的变化,其中两极板间电势能的差值为 $U_0 = 1.0 \text{ eV}$ 固定不变,板间距离 $a = 1 \text{ nm}$.从左到右4条曲线对应的粒子质量分别为 $m_e, 10m_e, 100m_e, 1000m_e$, m_e 表示电子的静止质量.各条曲线均表明即使带电粒子的入射能量小于两极板间的电势能,带电粒子也能克服反向电场力,穿透平行板电容器,平行板电容器通交流阻直流的效果在纳米尺度是不成立的.随着带电粒子的入射能量的增强,其透射系数会不断增加,当带电粒子的能量 E 大于 U_0 的3倍,透射系数接近1,对应基本所有的带电粒子都能完全穿透平行板电容器.同时这里没有共振隧穿现象,这是因为电容器势垒不具有空间对称性.对比4条曲线,还可发现在同一个横坐标下,4条曲线的透射率大小不一样,说明即使带电粒子的动能不变,带电粒子的透射系数还是会受到粒子质量的影响.



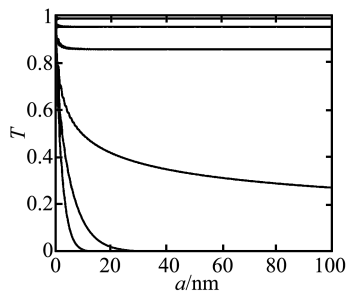
(a) T 随粒子能量的变化



(b) T 随粒子质量的变化



(c) T 随势能差值的变化



(d) T 随板间距离的变化

图3 透射系数随各量的变化

图3(b)给出透射系数随粒子质量的变化,其中板间距离 $a = 1 \text{ nm}$,粒子的能量 $E_0 = 1.0 \text{ eV}$ 固定不变,从上到下6条曲线分别对应 $U_0 = 0.4E_0, 0.6E_0, 0.8E_0, E_0, 1.1E_0, 1.2E_0$.图中各条曲线显示,随着带电粒子的质量变大,粒子的透射系数会不断减小,直到趋近一个稳定的常数.该结果表明带电粒子的动量大小会影响其透射系数,粒子动能不变的情况下,随着粒子质量增加,其动量会减小,进而降低其透射几率.同时发现 $U_0 \geq E_0$ 的粒子的透射系数会趋近于零, $U_0 < E_0$ 的粒子的透射系数趋近于一个稳定的常数,说明决定透射的关键因素还是入射粒子的能量与势能差值的大小关系.

图3(c)给出透射系数随两极板间势能差值 U_0 的变化,其中带电粒子质量为 m_e ,粒子的入射能量 $E_0 = 1.0 \text{ eV}$ 保持不变,从右到左4条曲线对应的电容器两极板间的距离分别为 $1 \text{ nm}, 2 \text{ nm}, 10 \text{ nm}$,

100 nm. 每条曲线均表明随着势能差值的增加, 透射系数会不断减小, 当势能差值大于带电粒子能量的3倍, 透射系数接近零, 对应基本没有带电粒子都能穿透平行板电容器. 对比4条曲线, 还可发现即使两极板间电势能的差值不变, 当电容器两极板间的距离增加, 带电粒子的透射系数还是会不断减小, 此时对应电容器势垒的宽度变宽了, 更难被跨越. 当两极板间的距离非常大, 达到100 nm, 此时小于势垒能量的带电粒子基本不会发生透射.

图3(d)给出透射系数随两极板间距离 a 的变化, 其中带电粒子质量为 m_e , $E_0 = 1.0$ eV, 从上到下6条曲线分别对应 $U_0 = 0.4E_0, 0.6E_0, 0.8E_0, E_0, 1.1E_0, 1.2E_0$, 每条曲线都显示随着两极板间的距离的变大, 透射系数有减小的趋势. 在透射系数减小的过程中, 其实不是单调递减, 而是会出现波浪形振荡的减小, 这体现了微观粒子的波粒二象性. 更具体的, 可发现随着两极板间的距离的变大, $U_0 \geq E_0$ 的粒子的透射系数会趋近于零, $U_0 < E_0$ 的粒子的透射系数趋近于一个稳定的常数, 这个常数小于1. 说明 $U_0 \geq E_0$ 时, 电容器的尺寸也需变大到100 nm以上, 接近宏观尺寸, ‘是’和‘否’透射表现得更加明显, 渐渐符合宏观规律那确定的因果关系, 电容器阻直流的效果才会比较明显.

4 结论

本文探讨带电粒子克服势垒穿透单个介观平行板电容器的问题, 发现即使带电粒子的入射能量小于两极板间的电势能, 带电粒子也能克服反向电场力, 穿透平行板电容器. 随着带电粒子的入射能量的增强, 其透射系数会不断增加. 在入射能量不变的情况下, 增加反向电压、增加粒子质量、增加两极板间的距离等因素都会降低带电粒子的透射系数. 上述结果表明量子隧穿效应对纳米元器件的性能影响很大, 平行板电容器通交流阻直流的效果在纳米尺度是难以实现的, 就算带电粒子的入射能量小于两极板间的电势能, 也需电容器两极板的距离大于100 nm以上, 此时其阻直流的效果才会比较明显.

参考文献

- 1 张永德. 量子力学(第2版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008. 55~59
- 2 周世勋. 量子力学教程(2版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2009. 19~21
- 3 Olivier Vallée, Manuel Soares. Airy functions and applications to physics[J]. London: Imperial College Press London, 2004, 15(1): 5~7
- 4 吴仍来. 一维M形势垒透射系数的计算与分析[J]. 物理通报, 2019, 38(7): 22~30

The Issue about the Transmission of Charged Particles between Mesoscopic Parallel-plates Capacitor

Wu Renglai

(School of Electronic Information and Electrical Engineering, Huizhou University, Huizhou, Guangdong 516007)

Xiao Shifa

(School of Physical Science and Technology, Lingnan Normal University, Zhanjiang, Guangdong 524048)

Yang Changbiao

(The Attached Middle School of Lingnan Normal University, Zhanjiang, Guangdong 524048)

Abstract: Based on the Schrodinger equation in quantum mechanics, this paper has solved the problems about that charged particles go through the parallel plates of mesoscopic capacitor in the case of overcoming the potential barrier, and has analyzed the variation of the transmission probability of charged particles with various parameters, such as the energy and mass of the incident particles, the electric potential-energy difference of the incident particles on the two plates of the capacitor, and the distance between the two parallel plates, and so on.

Key words: mesoscopic parallel-plate capacitor; schrodinger equation; transmission coefficient