

# 基于 Algodoo 对不同情况的斜抛运动研究\*

李广富 南亚亚 何婧 高永伟

(宁夏大学物理与电子电气工程学院 宁夏 银川 750021)

(收稿日期:2021-05-19)

**摘要:**基于斜抛运动规律,结合相应问题,利用 Algodoo 仿真实验平台深入研究在有和没有空气阻力情况下斜抛运动的轨迹、射程、射高、速度和加速度之间的差异,同时在考虑空气阻力的情况下对影响斜抛运动射程、射高的因素进行探究,并提出了将所得研究结果融入“斜抛运动”教学的相关建议。

**关键词:**斜抛运动 空气阻力 Algodoo

## 1 前言

2019年人教版物理必修2的“抛体运动规律”一节中的“思考与讨论”栏目曾提出了如图1所示的问题:



尝试导出表达图5.4-4所示的斜抛运动轨迹的关系式,讨论这个关系式中物理量之间的关系,看看能够得出哪些结论。

以上讨论有一个前提,即空气阻力可以忽略。如果速度不大,例如用手抛出一个石块,这样处理的误差不大,但是物体在空气中运动时,速度越大,阻力也越大,所以,研究炮弹的运动时就不能忽略空气阻力。根据你的推测,炮弹运动的实际轨迹大致是怎样的?

图1 教材思考题

物体在空气中运动时,速度越大,阻力也越大,所以研究炮弹的运动时就不能忽略空气阻力。那么在考虑空气阻力的情况下,炮弹的运动轨迹是怎样的?由教材上的思考题可以看出,教材编写者非常注重引导教师将考虑空气阻力的斜抛运动作为拓展知识引入课堂,因为这样会更好让学生将物理与生活联系起来,加深学生对斜抛运动的认识。尽管已有研究曾用科学仿真计算软件——Matlab模拟仿真给出了物体在空气阻力作用下的斜抛运动轨迹,

同时也探究了初速度、抛射角对射程和射高的影响<sup>[1,2]</sup>,但并未深入研究物体质量等其他因素对斜抛运动的影响,而且也并未将研究结果与教学结合起来。同时,中学物理教师和中学生并未掌握利用Matlab来编写代码的能力。显然,这样的研究结果不太适合应用在教学上。

Algodoo是瑞典Algorix Simulation AB公司推出的仿真实验平台,不但容易上手,而且可以模拟仿真不同条件下的物理实验,还具有生成数据图表快速准确等优点<sup>[3]</sup>。

为此,本文首先分别利用Algodoo和科学仿真计算软件Matlab对有和没有空气阻力情况下的斜抛运动进行研究,得出相关结论,同时将两种软件的模拟计算结果进行对比,以说明Algodoo平台数据的有效性。其次,基于Algodoo平台探究相关因素对有空气阻力情况下斜抛运动的影响,并最终给出基于Algodoo平台开展“斜抛运动”教学的相关建议。

## 2 基于生活实例对不同情况的斜抛运动研究

物体在运动过程中总要受到空气阻力,当速度较小时,空气阻力正比于速度的一次方,速度较大时,空气阻力正比于速度的二次方,当速度继续增大时,空气阻力将与速度的更高次方有关。本文只研究空气阻力分别与物体速度一次方和二次方成正比这两种情况。

\* 宁夏教育厅教育教学改革项目,项目编号:NXBIG-5;国家自然科学基金资助项目的研究成果,项目编号:11662017

作者简介:李广富(1994-),男,在读硕士研究生,研究方向为中学物理教学。

通讯作者:高永伟(1979-),男,副教授,研究方向为中学物理教学。

## 2.1 投篮

投篮时,篮球所做的运动为斜抛运动.因此,在研究考虑空气阻力的斜抛运动时,可以将投篮作为问题探究的背景.由于篮球的速度不大,此时篮球所受到的空气阻力与速度的一次方成正比.

**【例1】**一个小孩在空地上练习投篮,设篮球为4号儿童比赛用球,其半径 $r_1$ 为0.1 m,质量 $m_1$ 为0.4 kg,重力加速度 $g$ 取为 $9.8 \text{ m/s}^2$ ,现小孩以初速度 $v_0$ 为 $15 \text{ m/s}$ 、抛射角 $\alpha$ 为 $30^\circ$ 将篮球抛出.在有和没有空气阻力情况下,篮球的运动轨迹有什么区别?两种情况下篮球的速度、加速度又是如何变化的?

在忽略空气阻力的情况下,篮球以一定的初速度和角度斜向上抛出,以篮球质心的运动轨迹作为 $xOy$ 平面,抛出点作为原点,其运动轨迹及受力如图2所示.

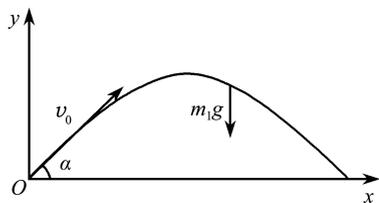


图2 无阻力情况下篮球运动轨迹与受力图示

篮球的水平速度 $v_x$ ,竖直速度 $v_y$ 分别为

$$v_x = v_0 \cos \alpha \quad (1)$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt \quad (2)$$

篮球的射程 $x$ 和射高 $y$ 为

$$x = v_0 t \cos \alpha \quad (3)$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} gt^2 \quad (4)$$

在现实生活中,空气阻力 $f$ 一般为

$$f = \frac{1}{2} C_D \rho S v^n \quad (5)$$

其中, $C$ 为阻力系数, $\rho$ 为空气密度, $S$ 为物体的特征面积, $n$ 为空气阻力指数.

为了计算方便,令比例常数为 $k$

$$k = \frac{1}{2} C_D \rho S \quad (6)$$

通过将球体的阻力系数 $C = 0.5$ ,空气密度 $\rho = 1.205 \text{ kg/m}^3$ ,篮球的特征面积 $S = 0.01\pi \text{ m}^2$ 代入式(6),可得此时的比例常数 $k_1 = 0.01$ .

在受到空气阻力的情况下,篮球的轨迹和受力分析如图3所示.

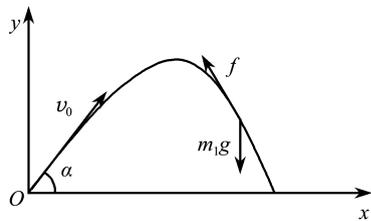


图3 有阻力情况下篮球运动轨迹与受力分析图示

在有空气阻力情况下,设篮球的水平速度为 $v_x'$ ,竖直速度为 $v_y'$ ,根据牛顿第二定律,在水平方向、竖直方向则有

$$-k_1 v_x' = m_1 \frac{dv_x'}{dt} \quad (7)$$

$$-m_1 g - k_1 v_y' = m_1 \frac{dv_y'}{dt} \quad (8)$$

由上面两式可得

$$v_x' = v_0 \cos \alpha e^{-\frac{k_1}{m_1} t} \quad (9)$$

$$v_y' = \left( \frac{m_1 g}{k_1} + v_0 \sin \alpha \right) e^{-\frac{k_1}{m_1} t} - \frac{m_1 g}{k_1} \quad (10)$$

则此时篮球的射程 $x'$ 和射高 $y'$ 分别为

$$x' = \frac{m_1}{k_1} v_0 \cos \alpha \left( 1 - e^{-\frac{k_1}{m_1} t} \right) \quad (11)$$

$$y' = \frac{m_1}{k_1} \left( \frac{m_1 g}{k_1} + v_0 \sin \alpha \right) \left( 1 - e^{-\frac{k_1}{m_1} t} \right) - \frac{m_1 g t}{k_1} \quad (12)$$

消去式(11)和(12)中的时间 $t$ 即可得到篮球的运动轨迹.利用Matlab编写程序可给出篮球在两种情况下的运动轨迹,结果如图4所示.

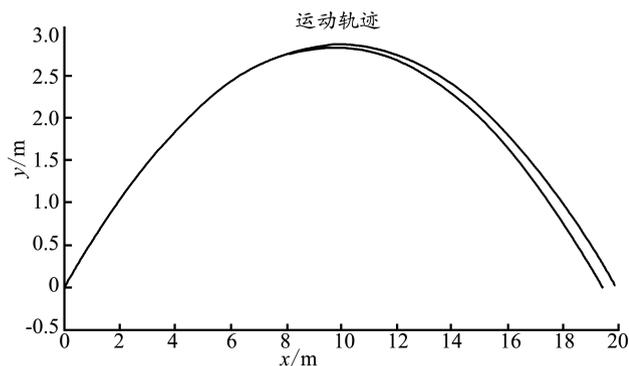


图4 有和没有空气阻力情况下篮球运动轨迹对比图(Matlab)

图4中,上、下两条曲线分别代表没有空气阻力和有空气阻力情况下篮球的运动轨迹.结果表明,有空气阻力时篮球的射程和射高略小于无空气阻力时的射程和射高,由于篮球的速度较小,所以空气阻力对其运动的影响也较小,篮球的运动轨迹不再是严格的抛物曲线.

与Matlab科学仿真计算软件不同,Algodoos是

基于后台计算,通过可视化界面操作以实现物体运动规律的模拟仿真.利用 Algodoo 平台模拟仿真得到的关于篮球在有和没有空气阻力情况下的运动轨迹如图 5 所示.

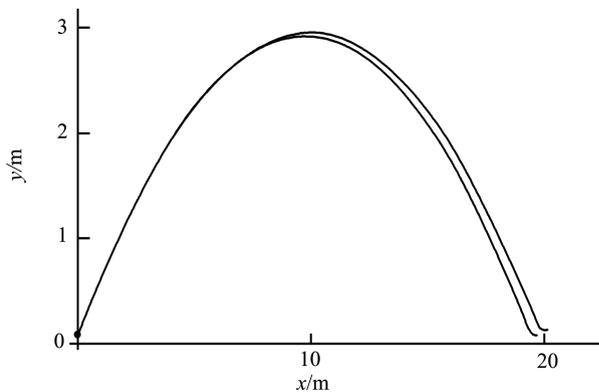


图 5 有和没有空气阻力情况下篮球运动轨迹对比图(Algodoo)

图 5 中上、下两条曲线也分别代表篮球在无、有空气阻力情况下的运动轨迹,结论与图 4 相同.可见,通过两种软件均能实现对篮球在有和没有空气阻力情况下运动轨迹的模拟和比较.为了更细致地分析和比较两种软件对有空气阻力情况下篮球运动规律描述的差异,将两种软件所得数据一并绘于图 6.

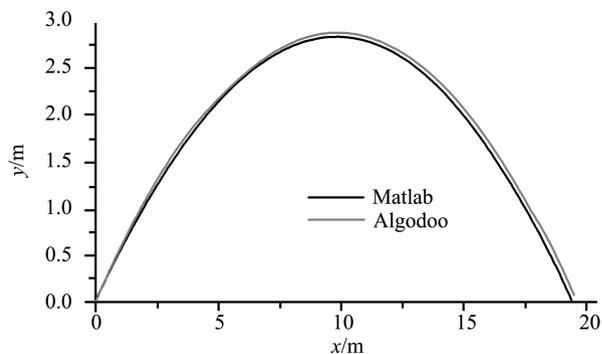


图 6 有空气阻力情况下篮球运动轨迹模拟结果对比

图 6 表明,通过两种软件模拟得到的篮球运动轨迹吻合很好,表 1 给出了详细的数据比较.

表 1 篮球的射程、射高的计算对比

物理量	Algodoo	Matlab
射程(无空气阻力)/m	19.932	19.880
射程(空气阻力 $f = -kv$ )/m	19.591	19.414
射高(无空气阻力)/m	2.875	2.870
射高(空气阻力 $f = -kv$ )/m	2.837	2.814

由表 1 可知,采用两种软件计算得到的结果非常接近,上表也可以得出与图 4 相同的结论.

结合图 6 和表 1 可以看出,Matlab 与 Algodoo 均能模拟仿真出篮球在有和没有空气阻力情况下的

运动轨迹,而且两者误差非常小,同时 Algodoo 可以通过简单的操作而不用编写代码就能够模拟出斜抛运动的轨迹.因此,Algodoo 比 Matlab 更适合应用到“斜抛运动”的课堂教学中.

由于 Matlab 需要编写相关的代码才能对篮球的速度、加速度在斜抛运动过程中的变化情况进行探究,而 Algodoo 具有快速实时输出物体运动过程中相关物理量变化情况的功能,使用更加方便.为此,以下将只利用 Algodoo 在有和没有空气阻力的情况下对篮球的速度、加速度在斜抛运动过程中的变化情况进行研究.

图 7 给出了篮球在有和没有空气阻力时的速度随时间变化曲线.

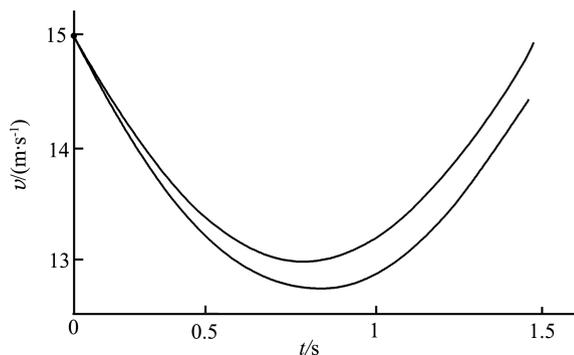


图 7 篮球速度对比图

图 7 的上下两条曲线分别表示在没有和有空气阻力情况下篮球的速度随时间变化曲线.虽然两者都是抛物线,但是在有空气阻力的情况下,篮球的速度减少量较大,因为其不但受到重力的作用,在运动过程中还时刻受到与速度方向相反的空气阻力作用.

篮球在有和没有空气阻力时的加速度随时间变化如图 8 所示.

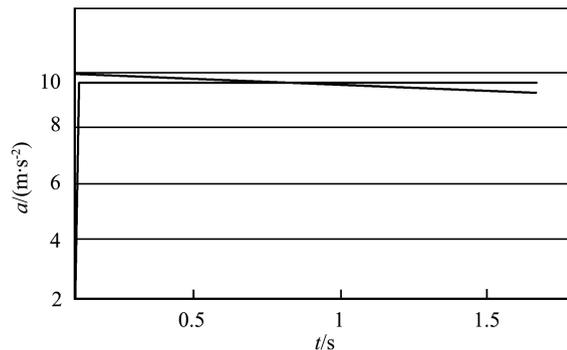


图 8 篮球加速度对比图

图 8 中水平直线表示的是没有空气阻力情况下篮球加速度随时间变化关系,因为在此条件下篮球只受重力作用,其加速度即为重力加速度,且不随时间发生变化.另一条曲线表示的是有空气阻力情况

下篮球加速度随时间变化关系,在上升阶段,空气阻力方向斜向下,篮球的合加速度将大于重力加速度;在下降阶段,空气阻力斜向上,篮球的合加速度将小于重力加速度。

## 2.2 炮弹的发射

当物体运动速度较大时,其所受到的空气阻力将与速度的二次方成正比.由于炮弹的速度 $v_0''$ 较大,可达几百米每秒,故研究此类问题时,可以将炮弹的发射作为研究的背景。

**【例2】**设炮弹的半径 $r_2$ 为0.1 m,质量 $m_2$ 为33 kg,重力加速度 $g$ 为9.8 m/s<sup>2</sup>,大炮以初速度 $v_0''$ 大小为300 m/s,抛射角 $\beta$ 为30°发射一颗炮弹,在有和没有空气阻力的情况下,炮弹的运动轨迹有什么区别?两种情况下炮弹的速度、加速度又是如何变化的?

在没有空气阻力的情况下,对炮弹射程、射高的分析和上面对篮球的分析基本一致,这里不再赘述。

在受到空气阻力的情况下,炮弹的轨迹和受力分析如图9所示。

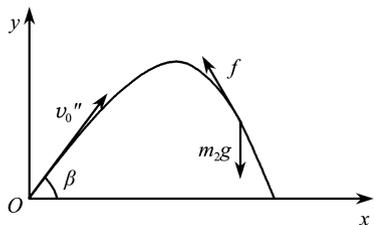


图9 有阻力情况下炮弹运动轨迹与受力分析图示

当炮弹所受空气阻力正比于速度二次方时,根据式(6),通过将球体的空气阻力系数 $C=0.5$ 、空气密度 $\rho=1.205 \text{ kg/m}^3$ 、炮弹的特征面积 $S=0.01\pi \text{ m}^2$ 代入可得此时的比例常数 $k_2=0.01$ 。

设炮弹某时刻的速度为 $v''$ ,此时速度与水平方向的夹角为 $\beta'$ ,水平方向运动的距离为 $x''$ ,竖直方向运动的距离为 $y''$ ,根据牛顿第二定律,在水平方向、竖直方向有

$$-k_2 v''^2 \cos \beta' = m_2 \frac{d^2 x''}{dt^2} \quad (13)$$

$$-m_2 g - k_2 v''^2 \sin \beta' = m_2 \frac{d^2 y''}{dt^2} \quad (14)$$

上面两式可转化为

$$\frac{d^2 x''}{dt^2} = -\frac{k_2}{m_2} \sqrt{\left(\frac{dx''}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy''}{dt}\right)^2} \frac{dx''}{dt} \quad (15)$$

$$\frac{d^2 y''}{dt^2} = -\frac{k_2}{m_2} \sqrt{\left(\frac{dx''}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy''}{dt}\right)^2} \frac{dy''}{dt} - g \quad (16)$$

令

$$y_1 = x'' \quad y_2 = \frac{dx''}{dt} \quad y_3 = y'' \quad y_4 = \frac{dy''}{dt}$$

则式(15)、(16)可转化为以下的方程组

$$y_2 = \frac{dy_1}{dt} \quad (17)$$

$$-\frac{k_2}{m_2} \sqrt{y_2^2 + y_4^2} y_2 = \frac{dy_2}{dt} \quad (18)$$

$$y_4 = \frac{dy_3}{dt} \quad (19)$$

$$-\frac{k_2}{m_2} \sqrt{y_2^2 + y_4^2} y_4 - g = \frac{dy_4}{dt} \quad (20)$$

利用 Matlab 求解上面方程组,并计算炮弹在无空气阻力情况下的射程与射高,即可模拟得到炮弹在有和没有空气阻力情况下的运动轨迹,结果如图10所示。

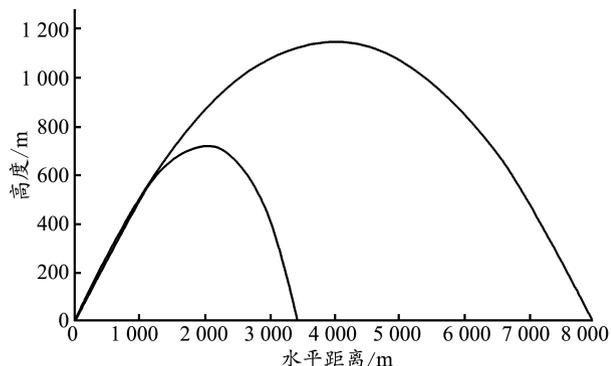


图10 有和没有空气阻力情况下炮弹运动轨迹对比图(Matlab)

图10中上、下两条曲线分别代表炮弹在没有和有空气阻力情况下的运动轨迹,从图10可看出,在受到空气阻力作用时,炮弹的射程和射高都远小于无空气阻力时的射程和射高,这也印证了教材上的那句话:物体在空气中运动时,速度越大,阻力也越大。

利用 Algodoo 模拟仿真炮弹在有和没有空气阻力情况下的运动轨迹,结果如图11所示。

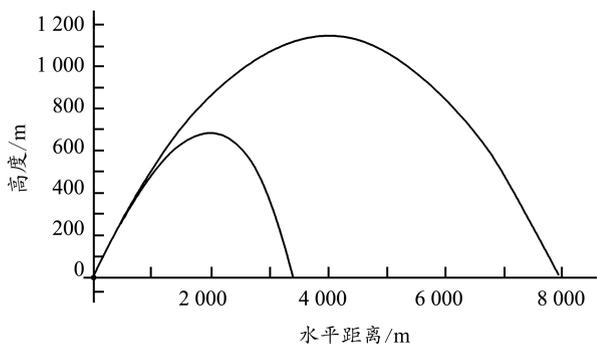


图11 有和没有空气阻力情况下炮弹运动轨迹对比图(Algodoo)

由图11可以得出与图10相同的结论.为了更细致地分析和比较这两种软件对有空气阻力情况下

炮弹运动规律描述的差异,将两种软件所得数据一并绘于图 12 进行比较.

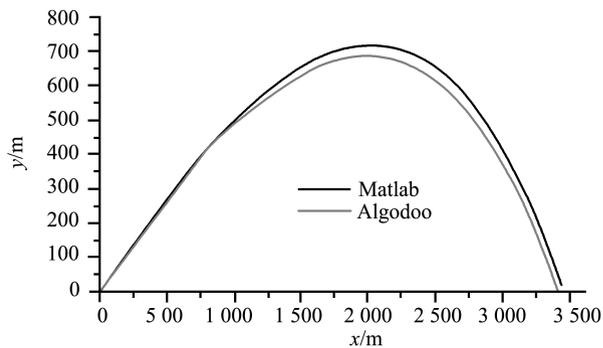


图 12 有空气阻力情况下炮弹运动轨迹模拟结果对比

图 12 表明,通过两种软件得到的炮弹轨迹吻合较好,两者之间的差异,可能是 Matlab 采用数值方法求解离散方程代替原始方程所产生的截断误差或者是由于计算机储存精度不足所产生的差异.表 2 给出了详细数据比较.

表 2 炮弹的射程、射高的计算对比

物理量	Algodo0	Matlab
射程(无空气阻力)/m	7 937.047	7 953.000
射程(空气阻力 $f = -kv^2$ )/m	3 416.781	3 441.302
射高(无空气阻力)/m	1 145.988	1 148.000
射高(空气阻力 $f = -kv^2$ )/m	687.281	720.186

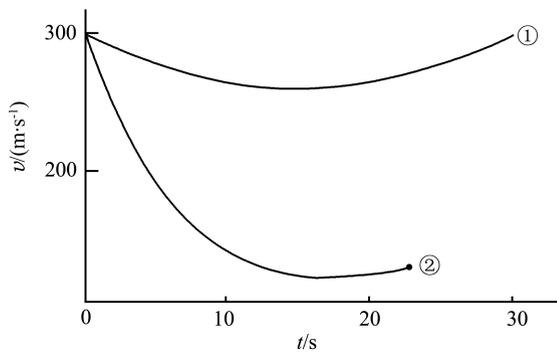
由表 2 可知,采用两种软件计算得到的结果较为接近.

结合图 12 和表 2 可以看出,虽然两种软件在模拟速度较大的物体的斜抛运动时存在一定的差异,但是量值在 5% 的范围内,同时由于 Algodo0 的使用方便性,所以,由于一节课课堂教学时间是有限的,在课堂上不可能占用很多的时间来编写程序,而 Algodo0 具有快速实时输出物体运动过程中相关物理量变化情况的功能,Algodo0 比 Matlab 更适合应用到“斜抛运动”的课堂教学中.

以下利用 Algodo0 来对炮弹的速度、加速度在运动过程中随时间变化情况进行研究.首先给出炮弹在有和没有空气阻力情况下速度随时间变化关系曲线,结果如图 13 所示.

图 13 中上下两条曲线分别表示在没有空气阻力和有空气阻力情况下炮弹的速度随时间变化曲线.在不受空气阻力的情况下,炮弹落到地面时的速度大小与发射速度保持一致.但是,在有空气阻力的

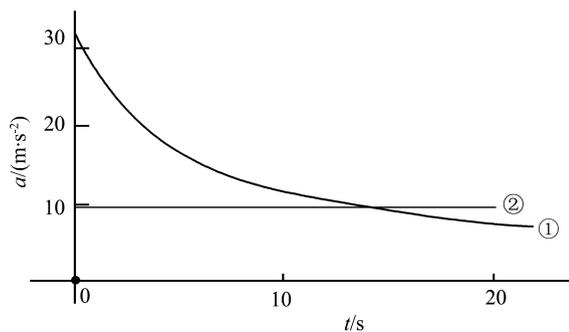
情况下,炮弹的速度减少量较大.



①没有空气阻力的情形;②有空气阻力的情形

图 13 炮弹速度对比图

炮弹在有和没有空气阻力时的加速度随时间变化如图 14 所示.



①有空气阻力的情形;②没有空气阻力的情形

图 14 炮弹加速度对比图

图 14 中水平直线表示无空气阻力情况下炮弹加速度随时间变化关系,在无空气阻力时,炮弹只受重力作用,故其加速度为重力加速度.另一条曲线表示的是有空气阻力情况下炮弹加速度随时间变化关系,在上升阶段,空气阻力方向斜向下,炮弹的合加速度将大于重力加速度;在下降阶段,空气阻力斜向上,其合加速度将小于重力加速度,所以炮弹的加速度先是大于  $9.8 \text{ m/s}^2$ ,后逐渐减少.

由于空气阻力的方向总与速度的方向相反,而且在运动过程中是随位置而变化的,有和没有空气阻力时,加速度的方向是不同的,方向的变化十分复杂.因此,上述关于速度和加速度在有无空气阻力时的对比,都是指大小的对比.

### 3 空气阻力对斜抛运动影响的研究

在考虑空气阻力的斜抛运动中,影响射高和射程的因素不是单一的.所以,对影响斜抛运动的因素进行分析研究将变得非常重要.在考虑空气阻力的

情况下,借助 Algodoo 平台对影响斜抛运动的因素进行研究分析.

### 3.1 空气阻力 $f = -kv$ 时对影响斜抛运动的因素的研究

当物体所受到的空气阻力与速度的一次方成正比时,由式(11)、(12)可知,射程、射高分别与初速度、抛射角、质量和比例常数  $k$  有关.

#### (1) 初速度对射程、射高的影响

在考虑空气阻力情况下,设一小球的质量为  $0.4 \text{ kg}$ ,重力加速度为  $9.8 \text{ m/s}^2$ ,比例常数  $k$  为  $0.5$ . 将球以抛射角为  $30^\circ$ ,初速度分别为  $5 \text{ m/s}$ ,  $10 \text{ m/s}$ ,  $15 \text{ m/s}$ ,  $20 \text{ m/s}$ ,  $25 \text{ m/s}$  在同一位置抛出,结果如图 15 所示.

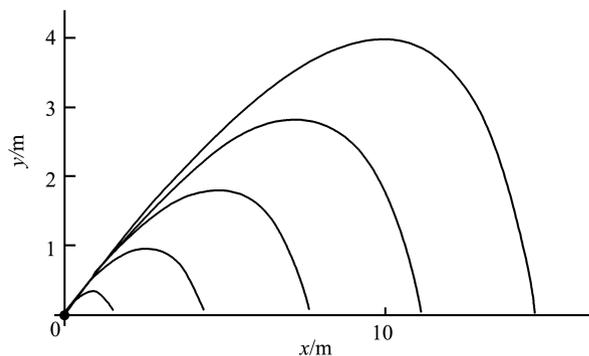


图 15 初速度对小球运动轨迹的影响

图 15 中从上到下的 5 条斜抛运动曲线对应的初速度依次减小. 由此可知,保持其他物理量不变,物体做斜抛运动的射程与射高随着初速度的增大而增加.

#### (2) 抛射角对射程、射高的影响

在考虑空气阻力情况下,设一小球的质量为  $0.4 \text{ kg}$ ,重力加速度为  $9.8 \text{ m/s}^2$ ,比例常数  $k$  为  $0.5$ . 将球以初速度为  $15 \text{ m/s}$ 、抛射角分别为  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$  在同一位置抛出,结果如图 16 所示.

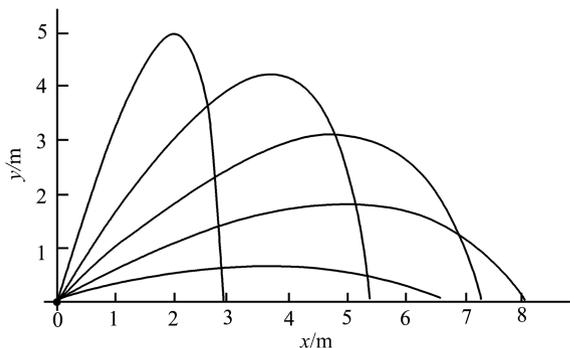


图 16 抛射角对小球运动轨迹的影响

图 16 中从左向右的 5 条斜抛运动曲线对应的抛射角依次减小. 图 16 表明,保持其他物理量不变,斜抛运动的射高与抛射角呈正相关. 随抛射角增大,射程先增加后减小,而且,当抛射角等于  $45^\circ$  时,所得射程将不再是最大值.

#### (3) 质量对射程、射高的影响

若考虑空气阻力存在,设重力加速度为  $9.8 \text{ m/s}^2$ ,比例常数  $k$  为  $0.5$ ,将 5 个质量分别为  $0.5 \text{ kg}$ ,  $1 \text{ kg}$ ,  $1.5 \text{ kg}$ ,  $2 \text{ kg}$  和  $2.5 \text{ kg}$  的小球以初速度  $15 \text{ m/s}$ ,抛射角为  $30^\circ$  在同一位置抛出,结果如图 17 所示.

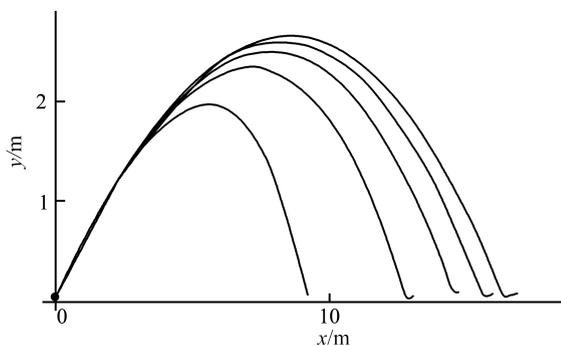


图 17 质量对小球运动轨迹的影响

图 17 中从上到下的 5 条斜抛运动曲线对应的质量依次降低. 图 17 表明,在保持其他物理量不变时,随着物体质量的增大,物体做斜抛运动的射程与射高也随之增大.

#### (4) 比例常数 $k$ 对射程、射高的影响

在考虑空气阻力情况下,设重力加速度为  $9.8 \text{ m/s}^2$ ,将质量为  $0.4 \text{ kg}$  的小球以初速度  $15 \text{ m/s}$ ,抛射角为  $30^\circ$ ,在比例常数  $k$  分别为  $0.05$ ,  $0.25$ ,  $0.5$ ,  $0.75$ ,  $1$  的环境下从同一位置抛出,结果如图 18 所示.

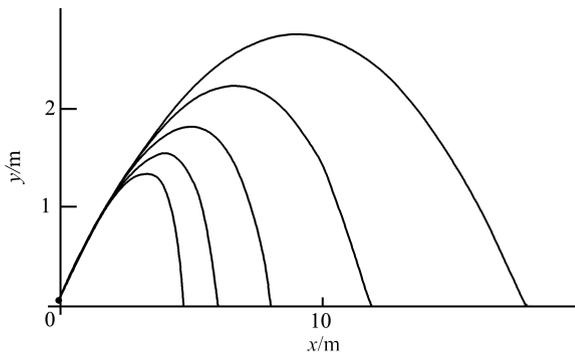


图 18 比例常数  $k$  对小球运动轨迹的影响

图 18 中从上到下的 5 条斜抛运动曲线对应的比例常数  $k$  依次增大, 由此可知, 在保持其他物理量不变时, 随着比例常数  $k$  的增大, 物体做斜抛运动的射程与射高随之减少。

### 3.2 空气阻力 $f = -kv^2$ 时对影响斜抛运动的因素的研究

当物体所受到的空气阻力与速度的二次方成正比时, 利用 Algodoo 也可探究初速度、抛射角、质量和比例常数  $k$  对射程、射高的影响, 结果分别如图 19, 20, 21 和 22 所示, 结论与上一部分相对应的结论一致, 这里不再赘述。

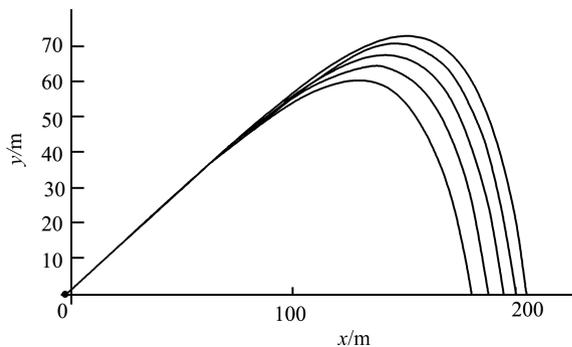


图 19 初速度对运动轨迹的影响

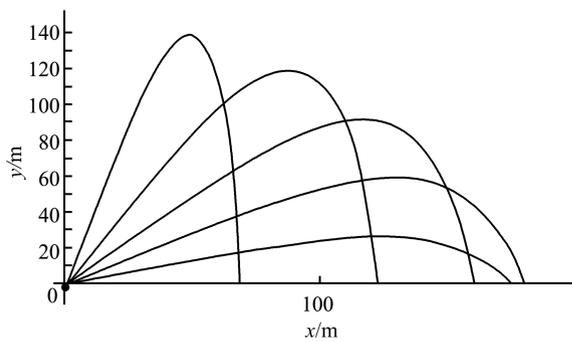


图 20 抛射角对运动轨迹的影响

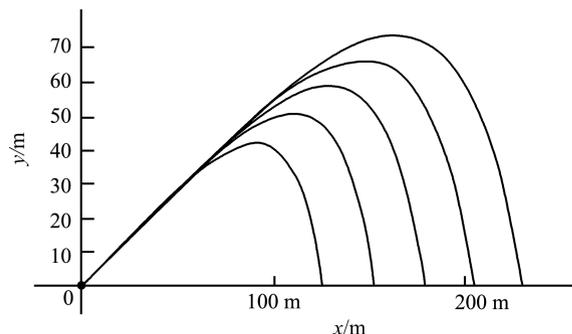


图 21 质量对运动轨迹的影响

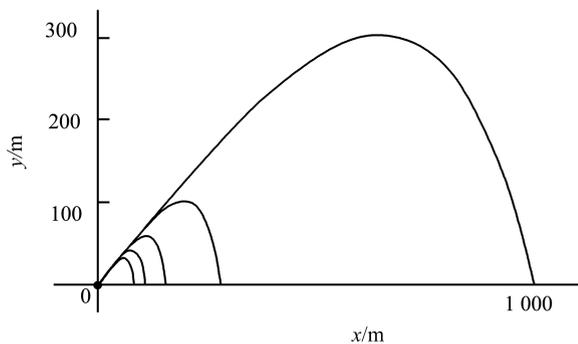


图 22 比例常数  $k$  对运动轨迹的影响

## 4 结束语

对于教材“思考与讨论”栏目所提出的问题, 利用 Algodoo 可以比 Matlab 更容易地给出有和没有空气阻力情况下斜抛运动规律的差异, 同时, 在考虑空气阻力的情况下, 利用 Algodoo 也可以更方便地探究影响斜抛运动的因素. 为此, 本文拟给出以下教学建议:

(1) 在课堂上可以结合 Algodoo 来给学生演示物体在有和没有空气阻力作用下的斜抛运动轨迹;

(2) 利用 Algodoo 的图表功能, 将做斜抛运动的物体的速度和加速度在有和没有空气阻力情况下的变化情况展示给学生;

(3) 由于 Algodoo 平台易于操作, 可以让学生用 Algodoo 自行探究影响斜抛运动的因素.

综上所述, 结合 Algodoo 对“斜抛运动”进行教学, 既可以为学生清晰地展示有和没有空气阻力时的斜抛运动的轨迹的区别, 又可以让学生知道在有空气阻力的情况下做斜抛运动的物体速度、加速度随时间的变化规律, 还可以引导学生利用 Algodoo 平台采用控制变量法来探究影响斜抛运动的因素, 以此来提高学生的学习兴趣, 并培养他们实事求是、严谨治学的科学探索精神.

### 参考文献

- 1 郭雪鹏. 考虑空气阻力与速度平方成正比的斜抛运动[J]. 物理通报, 2017, 36(6): 63~66
- 2 郭雪鹏. 考虑空气阻力的斜抛运动研究[J]. 物理教学, 2017, 39(4): 14~16
- 3 常晓慧, 侯恕. 应用 Algodoo 仿真物理实验辅助高中物理规律教学[J]. 物理通报, 2017, 36(6): 90~92