



与参考答案不一样的正确答案

—— 由非独立变量引发的问题

王美芳

(复旦大学附属中学 上海 200433)

(收稿日期:2021-06-07)

摘要:2021年上海青浦区的物理二模卷最后一题的最后一问,有学生给出了和参考答案看上去很不一样的另外一个答案.进一步的计算可以证明两个答案都是正确的.之所以出现这种情况,是因为题目中给出的物理量不是独立变量.这也给物理教师提出了更高的要求:在命题和阅卷过程中,应注意这一问题.在注重物理核心素养培养的今天,当学生提出质疑,应认真对待,注意保护学生的质疑精神.

关键词:电磁感应 独立变量 命题 质疑

1 是我做错了么

有个学生告诉我他做了今年的青浦物理二模卷最后一题的最后一小题,用了自己的方法,得到了一个跟参考答案完全不一样的解,他自己找不出问题在哪里,希望我帮他看一看.我看了他的解法,是利用牛顿第二定律,积分求解的.他提供的计算过程有些错误的地方,我帮他修正后得到的解依然是不同于参考答案的.这个事情比较有意思,所以和大家分享一下.

【题目】如图1(a)所示,在竖直平面内平行放置了两根完全相同的金属导轨,间距为 $L=0.2\text{ m}$.其

中 a_1b_1 段和 a_2b_2 段是竖直放置的足够长的光滑直轨道; b_1c_1 和 b_2c_2 段是半径为 $R=0.25\text{ m}$ 的光滑圆弧轨道,圆心角为 127° ,圆心 O_1 和 O_2 与 b_1 和 b_2 在同一高度; c_1d_1 和 c_2d_2 段是粗糙的倾斜直轨道,与水平面成 37° 角放置,轨道长度足够长.图1(b)是其正面视图, a_1a_2 之间连接一阻值为 $R_0=0.5\ \Omega$ 的电阻.现有一质量为 $m=0.1\text{ kg}$,电阻为 $r=0.5\ \Omega$ 的金属棒通过两端的小环套在两根轨道上,棒与轨道的 c_1d_1 和 c_2d_2 段之间的动摩擦因数为 $\mu=0.25$.棒从倾斜轨道上距离 c_1c_2 为 $s=2\text{ m}$ 处由静止释放,在棒到达 b_1b_2 瞬间,在竖直轨道区域内出现水平向右的匀强磁场,磁感应强度为 $B=0.5\text{ T}$,运动中棒始终

4 教育部办公厅.关于印发普通高校本科招生专业选考科目要求指引(试行)的通知:教学厅[2018]1号[Z].2018-01-24

5 北京教育考试院.2020年拟在京招生普通高校本科专业选考科目要求[Z].2018-5-15

6 浙江省教育厅.浙江省高考选考科目大学专业要求[EB/OL].<https://wenku.baidu.com/view/1ef2bfb1c950ad02de80d4d8d15abe23492f031f.html>

7 上海市教育厅.2020年拟在沪招生普通高校本科专业选考科目要求[EB/OL].<https://www.sohu.com/a/3338>

08064_661178

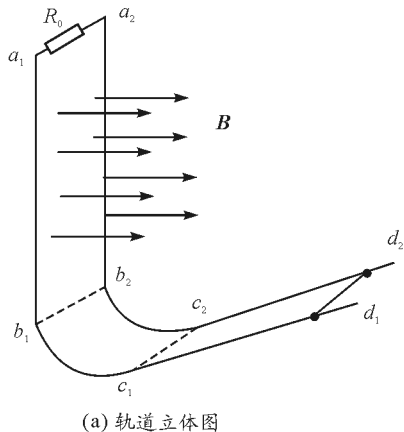
8 新华网.“3+1+2”!第三批改革省份发布高考综合改革方案[EB/OL].http://www.xinhuanet.com/politics/2019-04/23/c_1124405969.html

9 河北省教育厅.关于公布普通高校本科招生专业选考科目要求(3+1+2模式)的通知[EB/OL].<http://jyt.hebei.gov.cn/col/1410097726928/2019/07/11/1562827242863.html>

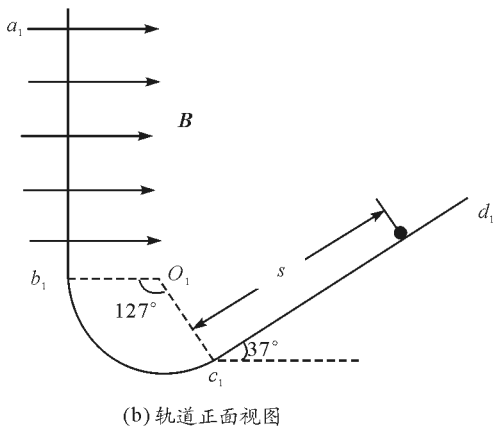
10 教育部办公厅.关于印发普通高校本科招生专业选考科目要求指引(3+1+2模式)的通知[Z].2019-5-13

与导轨垂直. ($\sin 37^\circ = 0.6, \cos 37^\circ = 0.8, g = 10 \text{ m/s}^2$)

- (1) 求棒在倾斜轨道上运动的时间 t_1 ;
- (2) 求棒到达 b_1b_2 处时 R_0 的电功率 P_0 ;



(a) 轨道立体图



(b) 轨道正面视图

图1 题目题图

其中第(4)小题独立于前面3个小题,所以这里跳过前面3小题,直接讨论第(4)小题.第(4)小题的参考答案是 $v_2 = gt_2 - v_1$,下面给出两种不同的解法.

(1) 微元累加解法

先给出常规的微元累加的解法:

以竖直向下为正,由牛顿第二定律得

$$mg + \left(-\frac{B^2 L^2}{R_0 + r}v\right) = ma$$

其中,安培力为 $-\frac{B^2 L^2}{R_0 + r}v$,上升过程速度为负,安培力则为正,而下降过程速度为正,安培力为负.

经过一小段时间 Δt

$$mg \Delta t - \frac{B^2 L^2}{R_0 + r}v \Delta t = ma \Delta t$$

考虑在磁场中的整个运动过程,对时间分割,再微元累加得

$$mg \sum \Delta t - \frac{B^2 L^2}{R_0 + r} \sum v \Delta t = m \sum a \Delta t$$

整个过程,时间为 t_2 ,位移为零,速度的变化量为 $v_2 - (-v_1)$,注意:进入磁场的初速度为 $-v_1$ (在本题中,已知条件中的 v_1 是初速度的大小部分,实际满足以上公式的初速度应为 $-v_1$),所以有

$$\sum \Delta t = t_2$$

$$\sum v \Delta t = 0$$

$$\sum a \Delta t = v_2 - (-v_1)$$

(3) 请分析说明棒在磁场区域运动的情况;

(4) 若棒刚越过 b_1b_2 处时的速度设为 v_1 ,在磁场内运动的时间设为 t_2 ,求棒刚离开磁场区域时的速度 v_2 .

联立得

$$mgt_2 - 0 = m[v_2 - (-v_1)]$$

$$v_2 = gt_2 - v_1$$

(2) 积分解法

再来看另一种解法:

由牛顿第二定律得

$$mg + F_{\text{安}} = ma$$

以竖直向下为正,则

$$mg - \frac{B^2 L^2}{(R_0 + r)}v = m \frac{dv}{dt}$$

$$g - \frac{B^2 L^2}{(R_0 + r)m}v = \frac{dv}{dt}$$

两边分别积分

$$\int_{-v_1}^v \frac{dv}{g - \frac{B^2 L^2}{(R_0 + r)m}v} = \int_0^t dt$$

$$\frac{g - \frac{B^2 L^2}{(R_0 + r)m}v}{g + \frac{B^2 L^2}{(R_0 + r)m}v_1} = e^{-\frac{B^2 L^2}{(R_0 + r)m}t}$$

$$v = \frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2}g - \left[\frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2}g + v_1\right]e^{-\frac{B^2 L^2}{(R_0 + r)m}t}$$

由此得 t_2 时刻对应速度 v_2

$$v_2 = \frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2}g - \left[\frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2}g + v_1\right]e^{-\frac{B^2 L^2}{(R_0 + r)m}t_2} \quad (1)$$

于是,这里我们看到了两种解,放在一起对比一下

$$\begin{cases} v_2 = gt_2 - v_1 \text{ (参考答案)} \\ v_2 = \frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2} g - \left[\frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2} g + v_1 \right] \cdot e^{-\frac{B^2 L^2}{\epsilon(R_0 + r)} m t} \text{ (积分求解)} \end{cases}$$

这里积分求解得到的答案看着比较复杂,和参考答案形式上很不一样,那么,它错了吗?

2 两个答案等价性证明

对积分求解继续深入,可得到 $s(t)$, 令 $s(t) = 0$, 得到在磁场中的运动时间 t_2 满足的关系式, 代回 v_2 的积分求解表达式, 可证明两个答案的等价性.

(1) 写出 $s(t)$

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} = v &= \frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2} g - \\ &\left[\frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2} g + v_1 \right] e^{-\frac{B^2 L^2}{\epsilon(R_0 + r)} m t} \\ \int_0^s ds &= \int_0^t \left\{ \frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2} g - \right. \\ &\left. \left[\frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2} g + v_1 \right] e^{-\frac{B^2 L^2}{\epsilon(R_0 + r)} m t} \right\} dt \\ s &= \frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2} gt + \frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2} \cdot \\ &\left[\frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2} g + v_1 \right] e^{-\frac{B^2 L^2}{\epsilon(R_0 + r)} m t} - \\ &\frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2} \left[\frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2} g + v_1 \right] \end{aligned}$$

(2) 给出磁场中运动的时间 t_2 满足的表达式

令 $s = 0$, 对应的 t 有两个解, $t_1 = 0$, 即刚进入磁场位移为零, 另一解 t_2 应对应出磁场时刻, 所以 t_2 满足

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2} gt_2 + \\ &\frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2} \left[\frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2} g + v_1 \right] e^{-\frac{B^2 L^2}{\epsilon(R_0 + r)} m t_2} - \\ &\frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2} \left[\frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2} g + v_1 \right] \end{aligned}$$

整理得 t_2 满足

$$\begin{aligned} \left[\frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2} g + v_1 \right] e^{-\frac{B^2 L^2}{\epsilon(R_0 + r)} m t_2} &= \\ \frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2} g + v_1 - gt_2 \end{aligned} \quad (2)$$

(3) 证明两种解的等价性

通过观察式(1)和式(2)的各项, 发现可由式(1)和式(2)联立求解, 即将式(2)中等号左边的表达式 $\left[\frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2} g + v_1 \right] e^{-\frac{B^2 L^2}{\epsilon(R_0 + r)} m t_2}$ 用等号右边的 $\frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2} g + v_1 - gt_2$ 代入式(1), 则式(1)变为

$$v_2 = \frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2} g -$$

$$\left[\frac{(R_0 + r)m}{B^2 L^2} g + v_1 - gt_2 \right] = gt_2 - v_1$$

两个解的等价性得证. 所以, 式(1)虽然形式与参考答案不同, 也是本题的一个正确答案.

3 反思

为什么会有两个看似不同的正确答案? 问题的关键是本题中, 在磁场中的运动时间 t_2 不是一个独立变量. 从刚才的证明中可以看出, t_2 是可以根据已知条件求得. 这就导致了本题 v_2 的表达形式不唯一.

实际上, 由于题目中给定的物理量不是独立变量, 造成答案不唯一情况并非只有这一个例. 2008年江苏物理高考最后一题类似于这种情况^[1], 学生有可能会给出不用于参考答案的另一个正确答案, 原因就是题目中给的已知量并非全部独立变量.

对我们教师来说, 由此得到的经验应该是: 在电磁感应计算题的命题过程中要做好设计探析^[2], 其中就要注意考虑到独立变量问题. 如果题目中出现类似情况, 对做出其他解而感觉迷惑的学生应加以鼓励并对其解分析解释. 在注重物理核心素养培养的背景下, 更应注意培养学生的质疑精神和发散性思维, 不能因为和参考答案不一致而武断地判定学生解答错误.

参考文献

- 1 王美芳. 江苏2008年高考最后一题会有两个正确的答案吗[J]. 物理教学, 2013(5): 69 ~ 70
- 2 郑行军. 电磁感应计算题的命题设计探析[J]. 物理教学, 2016(12): 52 ~ 55