中学物理教学

能实现"磁聚焦"的匀强磁场最小面积的探讨

李　惠

（株洲市第二中学　湖南 株洲　412007）

（收稿日期：2021 - 06 - 17）

摘　要：通过建模定量研究能实现"磁聚焦"的匀强磁场区域的最小面积并应用到 2009 年高考海南卷和 2021 年高考湖南卷的高考题解答中.

关键词：物理建模　最小面积　高考题"磁聚焦"

1　建模

1.1　提出问题

在 xOy 坐标系中有一正方形区域 $ABCD$，边长为 $2a$，坐标原点位于 BC 边中点，在该正方形区域存在垂直于纸面向外的匀强磁场（具体分布未知），从坐标原点沿纸面向正方形区域各个方向发射速率为 v，比荷为 $\frac{q}{m}$ 的带正电的粒子，不计粒子重力及粒子间相互作用力，要使带电粒子均沿垂直于 CD 边方向从 CD 边射出磁场，求磁感应强度 B 的大小以及磁场区域的最小面积.

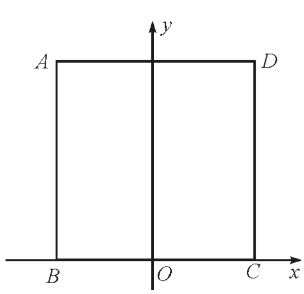


图 1　提出问题的情境配图

1.2　解决问题

因为磁场分布区域未知，粒子可以在匀强磁场中做一小段匀速圆周运动，再离开磁场做一小段匀速直线运动，再进入磁场中做匀速圆周运动…… 最后从 CD 边沿 $+x$ 轴方向射出磁场；粒子也可以一直在匀强磁场中，待到速度方向为 $+x$ 轴方向时离开磁场. 粒子入射的初速度方向不同，进入磁场的时刻不同，进出磁场的次数也无限制，所以磁场的区域会有很多种不同的分布形式，我们在寻找磁场的几何边界方程的过程中，尤其是磁场区域有洞的情形，会出现超越方程，只能采用近似数值解. 笔者在下文中仅考虑有精确解析解的前提下来定量探讨磁场的分布以及对应的最小面积.

给定磁感应强度，粒子在磁场中做匀速圆周运动的半径恒定为 r，且

$$r = \frac{mv}{qB} \tag{1}$$

对于从确定方向射出的粒子要达到题目要求必须要偏转确定的角度. 例如入射速度方向与 $+x$ 轴方向成 θ 角的粒子要偏转 $(\theta + 2n\pi)$ 后才能沿 $+x$ 轴方向射出，也就是说它必须至少在磁场中走过半径为 r，圆心角为 θ 的一段圆弧，把所有的粒子至少需要走过的圆弧密排在一起形成的平面图形的面积就是该磁感应强度 B 下对应的磁场的最小面积 $S_{\min}$.

接下来我们来寻求 $S_{\min}$ 与 r 的关系.

如图 2 所示，入射方向与 $+x$ 轴方向成 θ 角的粒子 1 在磁场中运动的圆弧为 OF，圆心在 F'，圆心角为 θ，与 $+x$ 轴方向成角 $(\theta + \mathrm{d}\theta)$ 的粒子 2 在磁场中运动的圆弧为 OE，圆心在 E'，圆心角为 $(\theta + \mathrm{d}\theta)$. 当 $\mathrm{d}\theta \to 0$ 时，两条弧线密排形成的面积就是月牙形区域 $OEFO$ 的面积.

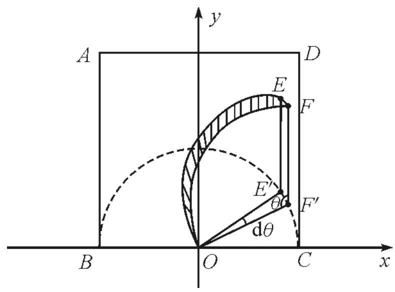


图 2　计算粒子最短轨迹密排成的图形面积

设为 dS，其大小为扇形 $OEE'O$ 的面积加上 $EFF'E'$ 区域面积再加上小扇形 $OF'E'$ 区域的面积，减去扇形 $OFF'O$ 的面积，即

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{2}r^2(\theta+\mathrm{d}\theta)+\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta+$$

$$r\cdot r\mathrm{d}\theta(-\cos\theta)-\frac{1}{2}r^2\theta=r^2(1-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

若入射粒子的速度方向与 $+x$ 轴夹角从 θ_1 到 θ_2 分布，则密排形成的面积为 S，即

$$S=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}S=$$

$$r^2[(\theta_2-\theta_1)-(\sin\theta_2-\sin\theta_1)] \tag{2}$$

若粒子入射方向为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则

$$S=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)r^2 \tag{3}$$

若粒子入射方向为 $[0,\pi]$，则

$$S=\pi r^2 \tag{4}$$

由此可见，对于磁感应强度 B 为确定大小的磁场，要满足题目要求，磁场的最小面积由式(1)、(2)确定，但磁场区域的形状有多种可能.

2　应用

【例 1】(2009 年海南卷) 如图 3 所示，$ABCD$ 是边长为 a 的正方形. 质量为 m、电荷量为 e 的电子以大小为 v_0 的初速度沿纸面垂直于 BC 边射入正方形区域. 在正方形内适当区域中有匀强磁场. 电子从 BC 边上的任意点入射，都只能从 A 点射出磁场. 不计重力，求：

(1) 求匀强磁场区域中磁感应强度的方向和大小；

(2) 此匀强磁场区域的最小面积.

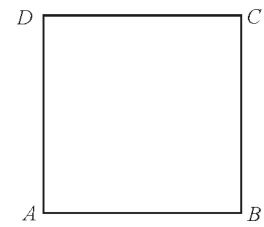


图 3　2009 年海南卷第 16 题图

用模型解答该题：我们知道，对于确定的磁感应强度 B 一定有对应的磁场区域的最小面积，该题把这个一一对应关系放在独立的两小问中，是颇让笔者费解的，而且磁场的分布有多种可能，此题的参考答案仅给出了一种情形，即当粒子的轨迹圆半径 r 等于正方形区域的边长时磁场区域为圆形区域的情形. 笔者现就这种磁感应强度提出 3 组分布，且定量求出 3 组分布中磁场的最小面积都是相等的，具体如下.

第一种分布：如图 4 阴影部分所示，假设粒子可以先做直线运动，再从 (x_1, y_1) 处进入磁场再聚集到坐标原点，则

$$x_1=r\sin\theta$$

$$y_1=r(1-\cos\theta)$$

即

$$x_1^2+(y_1-r)^2=r^2 \tag{5}$$

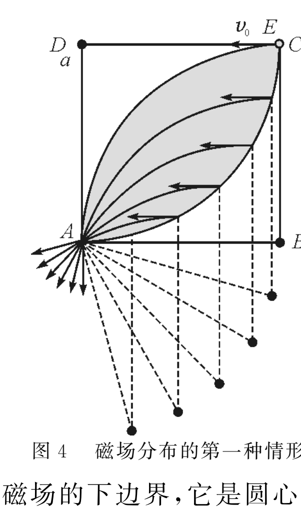


图 4　磁场分布的第一种情形

这就是磁场的下边界，它是圆心在 $(0, r)$ 处，半径为 r 的圆的一部分，上边界自然是从 $(0,0)$ 处射出的粒子的轨迹

$$(x_2-r)^2+y_2^2=r^2 \tag{6}$$

上边界如式(6) 所示，二者所围面积即磁场的最小面积

$$S_{\min}=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)r^2$$

与模型中式(3) 相符.

第二种分布:如图 5 所示,粒子从

$$x = r \tag{7}$$

处边界进入磁场,偏转一定角度后出磁场,做匀速直线运动聚集于 O 点,设粒子在 $P(x_3, y_3)$ 处出磁场,则由几何关系得

$$\frac{y_3}{\sqrt{x_3^2 + y_3^2}} = \frac{a - x_3}{r} \tag{8}$$

式(6)、(7)、(8) 分别作为磁场的上边界、右边界和下边界,我们用积分求解其面积.

$$S = \int_0^r y_2 \mathrm{d} x_2 - \int_0^r y_3 \mathrm{d} x_3 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) r^2$$

与第一种分布的最小面积相等.

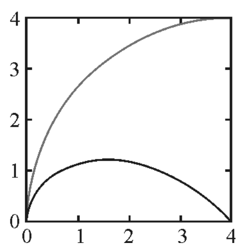


图 5　磁场分布的第二种情形

第三种分布:如图 6 所示,磁场分布在以$(a,0)$点为中心的$\frac{1}{4}$ 圆内的某些区域,具体分布未知,粒子先经过直线,再经过圆弧,再经过最后一段直线到达 O 点,最后一段直线长为 $l(\theta)$,与 x 轴夹角 θ,则磁场的右边界为(x_4, y_4),下边界为(x_5, y_5),可得

$$\begin{cases} x_4 = l(\theta)\cos\theta + r\sin\theta \\ y_4 = l(\theta)\sin\theta + r(1 - \cos\theta) \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} x_5 = l(\theta)\cos\theta \\ y_5 = l(\theta)\sin\theta \end{cases} \tag{10}$$

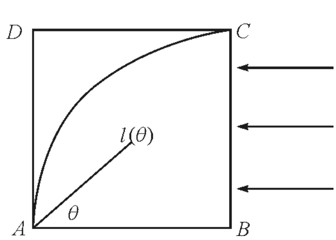


图 6　磁场分布的第三种情形

面积计算如下

$$S = \frac{\pi r^2}{4} - \int_0^r y_5 \mathrm{d} x_5 - \int_0^r x_4 \mathrm{d} y_4 =$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) r^2 + \left[\frac{l^2(\theta)}{2}\sin 2\theta\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$\left[rl(\theta)\sin\theta(1 - \sin\theta)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) r^2 + (0 - 0) + (0 - 0) = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) r^2$$

由以上积分可以看出,此面积与 $l(\theta)$ 的具体形式无关,且最小面积是个定值. 也即,磁场区域中即使有有限个洞(图 7),粒子按题目所述方式入射再聚集在 O 点,磁场的最小面积是个定值.

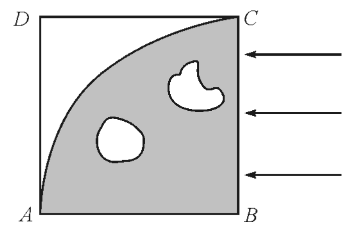


图 7　解析配图

若是把磁感应强度增大,粒子圆周运动半径减小,也是可以达到题目要求完成磁聚集的. 例如,我们把粒子的圆周运动半径设为 R,但 $R < a$,让粒子先从 $x = a$ 右边界进入磁场,从(x, y) 处出磁场,做直线运动打在 O 点,则磁场的上边界为

$$(x_6 - a)^2 + [y_6 - (a - R)]^2 = R^2 \tag{11}$$

左边界为

$$\frac{y_7}{\sqrt{x_7^2 + y_7^2}} = \frac{a - x_7}{R} \tag{12}$$

右边界

$$x_8 = a \tag{13}$$

粒子的圆周运动半径 R 不同,磁场形状就不同,图 8 所示为可能存在的两种情形. 我们用 Mathmatical 软件计算 $R < a$ 的情形下磁场区域的面积.

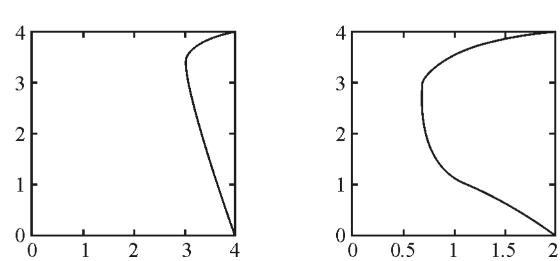


图 8　圆周运动半径 R 不同解析配图

设有以下 4 种参数对应的情形，脚本运行结果如表 1 所示.

表 1　计算结果

正方形区域边长 a/cm	粒子圆轨道半径 R /cm	磁场区域面积 S/cm^2	本文模型的最小面积S_{min}/cm^2
10	9	48.202 3	46.226 7
10	4	18.066 2	9.131 2
10	3	13.227 8	5.136 3
10	2	8.624 5	2.282 8

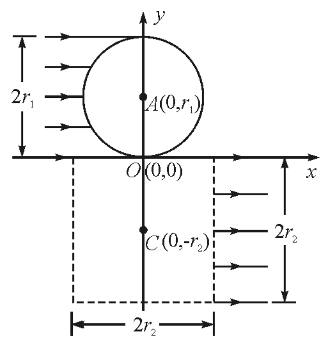
可以看出，R 越小，磁场面积越小，但都比本文建模得到的结论的最小面积大. 也即在该解析解的情形中，粒子轨道在磁场中没有达到密排. 若要达到密排，必须由更高级方法才能达到，但可以肯定，密排之后磁场的最小面积一定如本文文首模型所述.

【例 2】(2021 年高考湖南卷) 带电粒子流的磁聚焦和磁控束是薄膜材料制备的关键技术之一. 带电粒子流(每个粒子的质量为 m，电荷量为 $+q$) 以初速度 v 垂直进入磁场，不计重力及带电粒子之间的相互作用. 对处在 xOy 平面内的粒子，求解以下问题.

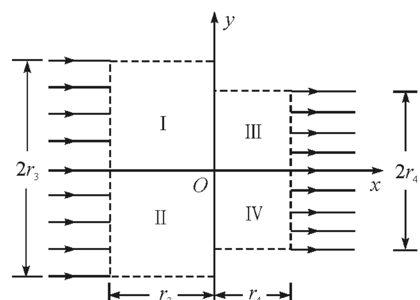
(1) 如图 9(a) 所示，宽度为 $2r_1$ 的带电粒子流沿 x 轴正方向射入圆心为 $A(0,r_1)$、半径为 r_1 的圆形匀强磁场中，若带电粒子流经过磁场后都汇聚到坐标原点 O，求该磁场磁感应强度 B_1 的大小.

(2) 如图 9(a) 所示，虚线框为边长等于 $2r_2$ 的正方形，其几何中心位于 $C(0,-r_2)$. 在虚线框内设计一个区域面积最小的匀强磁场，使汇聚到 O 点的带电粒子流经过该区域后宽度变为 $2r_2$，并沿 x 轴正方向射出. 求该磁场磁感应强度 B_2 的大小和方向，以及该磁场区域的面积(无需写出面积最小的证明过程).

(3) 如图 9(b) 所示，虚线框 Ⅰ 和 Ⅱ 均为边长等于 r_3 的正方形，虚线框 Ⅲ 和 Ⅳ 均为边长等于 r_4 的正方形. 在 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ 和 Ⅳ 中分别设计一个区域面积最小的匀强磁场，使宽度为 $2r_3$ 的带电粒子流沿 x 轴正方向射入 Ⅰ 和 Ⅱ 后汇聚到坐标原点 O，再经过 Ⅲ 和 Ⅳ 后宽度变为 $2r_4$，并沿 x 轴正方向射出，从而实现带电粒子流的同轴控束. 求 Ⅰ 和 Ⅲ 中磁场磁感应强度的大小，以及 Ⅱ 和 Ⅳ 中匀强磁场区域的面积(无需写出面积最小的证明过程).



(a)



(b)

图 9　2021 年高考湖南卷第 13 题配图

第(3) 问的探讨与 2009 年海南卷的考查类似，但命题者进行了精心的改编，思维能力要求更高，笔者在此不赘述. 我们来看第(2) 问，该题的问法很合理. 显然，根据本文模型，能精确解析求解，且又能符合题目要求的解答有多种，其中最典型的就是圆形磁场. 但题目只要求写出能完成磁聚集的磁场的磁感应强度及对应的分布，所以解答起来还是很轻松的. 学生只要能写出最典型的圆形磁场所对应的磁感应强度 $B_2=\dfrac{mv}{qr_2}$ 及圆形磁场的面积 $S_2=\pi r_2^2$ 即可得分. 可见，本题是一道物理味道很浓，但思维开阔、计算量非常小的题.

参 考 文 献

1　黄林天杨. 对 2009 年高考海南卷一道计算题参考答案的商榷[J]. 物理通报，2018(1)：33 ～ 34