竞 赛 与
物理专题研修

“活泼”的追击问题

——对第 33 届全国物理竞赛预赛题的思考

骆兴高
（杭州第十四中学　浙江 杭州　310006）
倪国富
（浙江省柯桥中学　浙江 绍兴　312030）

（收稿日期：2021-06-30）

摘　要：通过对第 33 届物理竞赛预赛 11 题一道追击问题参考答案和笔者思考方法的比较，提出解决问题要符合学生的认知规律，对物理情境分析应具有真实性、复杂性、典型性等特点，切不可以偏盖全误导学生，需具体问题具体分析，以达到培养学生解决问题的能力的教学目的.

关键词：追击问题　真实性　复杂性　典型性

【题目】 一足球运动员甲自 A 点向球门的 B 点踢出球，已知 A 和 B 之间的距离为 s，球自 A 向 B 的运动可视为水平地面上的匀速直线运动，速率为 u. 另一足球运动员乙到 AB 连线的距离为 l，到 A，B 两点的距离相等. 运动员甲踢出球后，运动员乙以匀速 v 沿直线去拦截该球. 设运动员乙开始出发去拦截球的时刻与球被运动员甲踢出的时刻相同.

（1）如果运动员乙能拦截到球，求运动员乙开始出发去拦截球直至拦截到球的时间间隔、球被拦截时球到 A 点的距离、球到运动员乙出发点的距离和运动员乙运动的方向与 A 和 B 连线的夹角；

（2）求为了使运动员乙能拦截到球，u，v，s 和 l 应当满足的条件.

评卷时竞赛委员会提供的参考答案如下：

（1）记运动员甲踢出球的时刻为零时刻. 设运动员乙沿着与 A 和 B 连线夹角为 θ 的方向运动，球在时刻 t 被运动员乙拦截. 令球被拦截时球到 A 点和运动员乙到出发点的距离分别为 s_1 和 s_2，则

$$s_1 = ut \tag{1}$$

$$s_2 = vt \tag{2}$$

由几何关系有

$$s_1 - s_2\cos\theta = \frac{s}{2} \tag{3}$$

$$s_2\sin\theta = l \tag{4}$$

从式(3)、(4) 消去 θ，并利用式(1)、(2) 得

$$l^2 + \left(ut - \frac{s}{2}\right)^2 = (vt)^2 \tag{5}$$

此即

$$(u^2 - v^2)t^2 - ust + \left(l^2 + \frac{s^2}{4}\right) = 0 \tag{6}$$

这是关于 t 的一元二次方程. 解为

$$t = t_\pm = \frac{us \pm \sqrt{u^2s^2 - 4(u^2 - v^2)\left(l^2 + \frac{s^2}{4}\right)}}{2(u^2 - v^2)} = \frac{us \pm \sqrt{4(v^2 - u^2)l^2 + u^2s^2}}{2(u^2 - v^2)} \tag{7}$$

由式(1)、(2)、(7) 得

$$s_1 = s_{1\pm} = u\,\frac{us \pm \sqrt{4(v^2 - u^2)l^2 + u^2s^2}}{2(u^2 - v^2)} \tag{8}$$

$$s_2 = s_{2\pm} = v\,\frac{us \pm \sqrt{4(v^2 - u^2)l^2 + v^2s^2}}{2(u^2 - v^2)} \tag{9}$$

由式(4)、(9) 得

$$\theta = \theta_\pm = \arcsin\frac{2l\left[us \mp \sqrt{4(v^2 - u^2)l^2 + u^2s^2}\right]}{v(s^2 + 4l^2)} \tag{10}$$

（2）方程(6) 有实数解的条件是

$$4(v^2 - u^2)l^2 + v^2s^2 \geqslant 0 \tag{11}$$

或

$$v^2\left(1+\frac{s^2}{4l^2}\right)\geqslant u^2 \tag{12}$$

依题意有

$$t>0 \tag{13}$$

条件(13)要求 $u>v$,当

$$t=t_+ \tag{14}$$

$u\neq v$,当

$$t=t_- \tag{15}$$

值得注意的是,利用式(10)条件 $-1\leqslant\sin\theta_\pm\leqslant 1$ 可写成

$$(s^2+4l^2)\left(v\frac{s}{2l}-u\right)^2\geqslant 0$$

它是自动满足的.综上所述,式(12)、(14)、(15)即运动员乙拦截到球的条件.

当式(12)中大于号成立时,运动员乙可在两处拦截到球;当式(12)中等号成立时

$$u=v\sqrt{1+\frac{s^2}{4l^2}}>v \tag{16}$$

式(7)~(10)成为

$$t=\frac{2l^2}{vs}\sqrt{1+\frac{s^2}{4l^2}} \tag{17}$$

$$s_1=\frac{s}{2}\left(1+\frac{4l^2}{s^2}\right) \tag{18}$$

$$s_2=l\sqrt{1+\frac{4l^2}{s^2}} \tag{19}$$

$$\theta=\arcsin\frac{s}{\sqrt{s^2+4l^2}} \tag{20}$$

运动员乙只能在一处拦截到球.

参考答案流程看下来类似于代数运算,并且解答过程不仅不完整且有误区,题目的本身是开放的,球运动速率 u 和足球运动员追击速率 v 之间的大小关系题中并没有明确,应考虑各种可能性,事实上笔者阅卷时发现参赛学生几乎没有按以上解题思路,阅卷老师对参考答案也提出了不少质疑,笔者认为完整的解答应按如下几种情形讨论:

如果以球为参考系,那么球是静止的,运动员乙在向球运动,乙在球的参考系中,既有向左的速度 u,又有对地参考系中的速度 v,u 和 v 的合速度 v_{21} 指向 A.

如图 1 所示,图中 α 为运动员乙在初始位置时与运动员甲连线和 AB 之间的夹角,θ 为运动员乙运动方向与运动员乙在初始位置时与运动员甲连线之间的夹角.

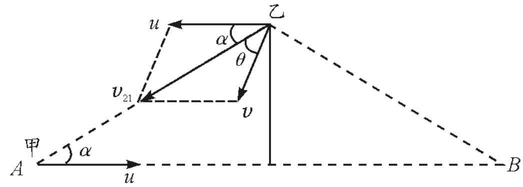

图 1 以球为参考系时,运动员乙的运动

第 1 种情形如图 2 所示,当 $v>u$ 时,$u\sin\alpha=v\sin\theta$,$\sin\theta=\dfrac{u}{v}\sin\alpha=\dfrac{2ul}{v\sqrt{4l^2+s^2}}$,令球被拦截所需时间为 t,则

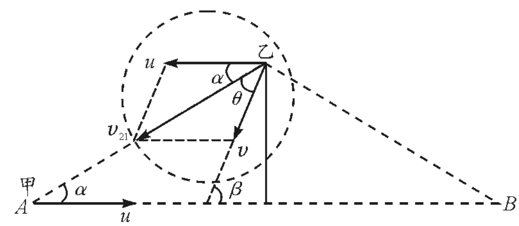

图 2 $v>u$ 时情形

$$t=\frac{\sqrt{l^2+\dfrac{s^2}{4}}}{u\cos\alpha+v\cos\theta}=$$

$$\frac{\sqrt{l^2+\dfrac{s^2}{4}}}{u\dfrac{\dfrac{s}{2}}{\sqrt{l^2+\dfrac{s^2}{4}}}+v\sqrt{1-\dfrac{4u^2l^2}{v^2(4l^2+s^2)}}}=$$

$$\frac{us-\sqrt{4v^2l^2+v^2s^2-4u^2l^2}}{2u^2-2v^2}$$

$$d_{球-A}=ut=u\frac{us-\sqrt{4v^2l^2+v^2s^2-4u^2l^2}}{2u^2-2v^2}$$

$$d_{球-乙}=vt=v\frac{us-\sqrt{4v^2l^2+v^2s^2-4u^2l^2}}{2u^2-2v^2}$$

题中明确要求运动员乙运动方向和 AB 之间的夹角,即图中的 β.因此原参考解答中仅用 θ 表示方向值得商榷的,应表述为

$$\sin\beta=\sin(\alpha+\theta)=$$

$$\frac{2l[us+\sqrt{4l^2(v^2-u^2)+v^2s^2}]}{v(4l^2+s^2)}$$

$$\beta=\arcsin\frac{2l[us+\sqrt{4l^2(v^2-u^2)+v^2s^2}]}{v(4l^2+s^2)}$$

第 2 种情形如图 3 所示,当 $v=u$ 时,$\theta=\alpha$

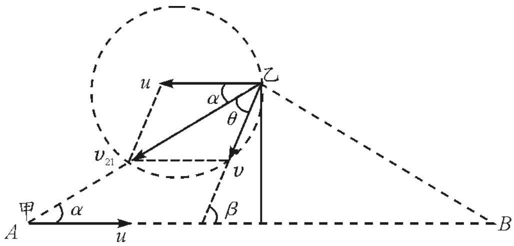

图 3　$v = u$ 时情形

$$t=\frac{\sqrt{l^2+\frac{s^2}{4}}}{u\cos\alpha+v\cos\theta}=\frac{\sqrt{l^2+\frac{s^2}{4}}}{2u\frac{\frac{s}{2}}{\sqrt{l^2+\frac{s^2}{4}}}}=\frac{4l^2+s^2}{4us}$$

$$d_{球-A}=ut=\frac{4l^2+s^2}{4s}$$

$$d_{球-乙}=vt=\frac{4l^2+s^2}{4s}$$

$$\beta=2\theta=2\arcsin\frac{2ul}{v\sqrt{4l^2+s^2}}$$

第 3 种情形如图 4 所示，当 $u\sin\alpha < v < u$ 时

$$u\sin\alpha=v\sin\theta$$

$$\sin\theta=\frac{u}{v}\sin\alpha=\frac{2ul}{v\sqrt{4l^2+s^2}}$$

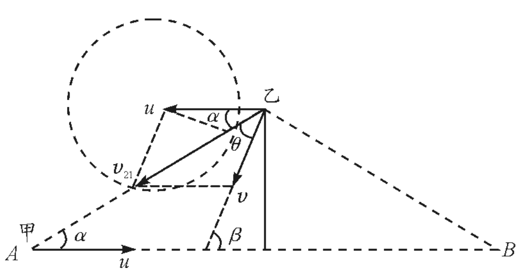

图 4　$u\sin\alpha < v < u$ 时情形

$$\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}=\pm\sqrt{1-\frac{4u^2l^2}{v^2(4l^2+s^2)}}=$$

$$\frac{4l^2+s^2}{2us\pm2\sqrt{4v^2l^2+v^2s^2-4u^2l^2}}=$$

$$\frac{us\pm\sqrt{4v^2l^2+v^2s^2-4u^2l^2}}{2u^2-2v^2}$$

$$d_{球-A}=ut=u\frac{us\pm\sqrt{4v^2l^2+v^2s^2-4u^2l^2}}{2u^2-2v^2}$$

$$d_{球-乙}=vt=v\frac{us\pm\sqrt{4v^2l^2+v^2s^2-4u^2l^2}}{2u^2-2v^2}$$

$$\beta=\arcsin\frac{2l(us\pm\sqrt{4l^2(v^2-u^2)+v^2s^2})}{v(4l^2+s^2)}$$

$$4v^2l^2+v^2s^2\geqslant4u^2l^2\qquad u\leqslant v\sqrt{1+\frac{s^2}{4l^2}}$$

第 4 种情形如图 5 所示.

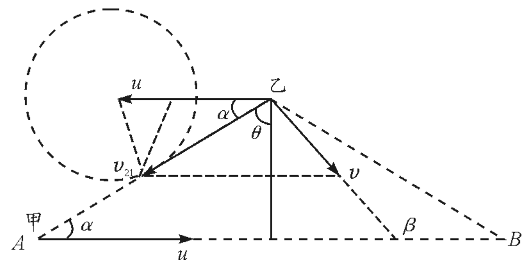

图 5　$v = u\sin\alpha$ 时情形

当 $v=u\sin\alpha$ 时，即

$$v=u\sin\alpha=u\frac{l}{\sqrt{l^2+\frac{s^2}{4}}}$$

$$t=\frac{\sqrt{l^2+\frac{s^2}{4}}}{u\cos\alpha}v=\frac{\sqrt{l^2+\frac{s^2}{4}}}{u\frac{\frac{s}{2}}{\sqrt{l^2+\frac{s^2}{4}}}}=\frac{4l^2+s^2}{2us}$$

$$d_{球-A}=ut=\frac{4l^2+s^2}{2s}$$

$$d_{球-乙}=vt=\frac{l}{s}\sqrt{4l^2+s^2}\qquad\beta=\frac{\pi}{2}+\theta$$

第 5 种情形 $v < u\sin\alpha$，如图 6 所示，无解.

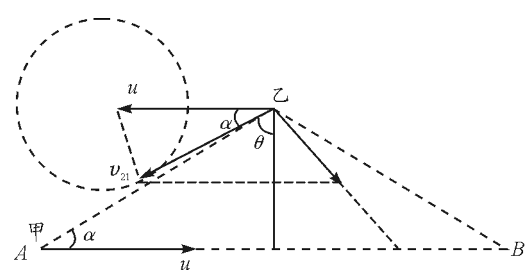

图 6　$v < u\sin\alpha$ 时情形

分类讨论是一种重要的物理思想，如果面临的问题不能以统一的同一种方法处理或同一种形式表述、概括，那么就需要把一个复杂的问题按一定的标准分割成若干个简单的问题(本文中的标准能拦截到球)，再逐一分析解决，得出每一类的相应结果，再综合各结果，得到最终答案的一种思想方法，也是近几年物理竞赛考题的一大热点[1,2].

参考文献

1　舒幼生，钟小平. 高中物理竞赛解题方法[M]. 杭州：浙江大学出版社，2007

2　许国梁. 物理教材与教法[M]. 南京：江苏科技出版社，1980