

均质细直杆在光滑半圆槽内运动的研究



罗正

(北京理工大学精工书院 北京 102488)

(收稿日期:2021-07-09)

摘要:光滑半圆槽放置在光滑水平地面上,均质细直杆在半圆槽内运动,因其具有角速度而不同于小球在光滑半圆槽内的运动.运用动量守恒和机械能守恒求解或运用理论力学和微积分相关知识从系统运动的瞬时状态求解,可以推导出均质细直杆的角速度.基于 MATLAB 的数值模拟表明,系统做周期运动,且随着半圆槽与均质细直杆质量比的增大,运动周期增大并收敛.

关键词:均质细直杆 光滑半圆槽 动量守恒 机械能守恒 瞬时状态 周期运动

1 提出问题

小球在光滑半圆槽内的运动是讲解动量守恒时常用的模型.如果将小球换成均质细直杆,那么对于均质细直杆的运动就无法用质点运动学的知识进行求解.均质细直杆是刚体,刚体运动因具有角速度而有别于质点运动,所以需要应用刚体运动学和动力学的相关知识进行推导.本文将以下列题目为例,通过两种方法求解均质细直杆在光滑半圆槽内的运动.

在图 1 所示的竖直平面内,质量 $m_1 = 3m$,半径为 r 的光滑半圆槽放置在光滑水平面上,其中放置有质量 $m_2 = m$,长度为 r 的均质细直杆 AB ,初始时刻 A 端位于半圆槽左顶点处,系统无初速度释放,求杆 AB 发生 30° 转角的瞬间,杆 AB 的角速度.

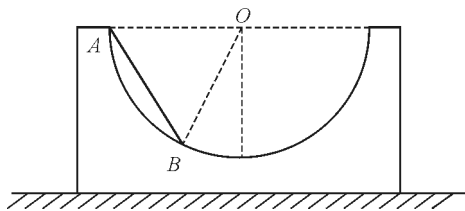


图 1 半圆槽-均质细杆系统

2 用动量守恒和机械能守恒求解杆 AB 的角速度

如图 2 所示,半圆槽沿水平方向做直线运动,杆

AB 的质心 C 相对于半圆槽以动点 O 为圆心做圆周运动.

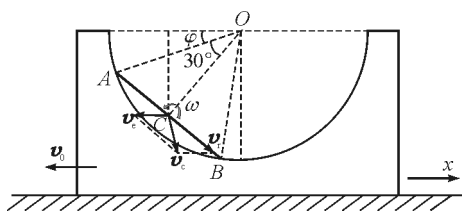


图 2 速度分析

设质心 C 的速度为 v_c ,半圆槽速度为 v_0 ,质心 C 相对于半圆槽的速度为 v_r .以半圆槽为参考系,选取质心 C 为动点,根据伽利略速度变换有

$$v_c = v_0 + v_r \quad (1)$$

设杆 AB 的角速度为 ω ,则 $v_r = \frac{\sqrt{3}}{2} \omega r$.由于系统在运动的过程中,水平方向不受外力,且初始时刻系统静止,根据动量守恒定律

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{cx} = 0$$

有

$$-m_1 v_0 + m_2 \left(-v_0 + v_r \cos \frac{\pi}{6} \right) = 0 \quad (2)$$

整理得

$$v_0 = \frac{\sqrt{3}}{8} v_r = \frac{3}{16} \omega r \quad (3)$$

在系统运动的过程中,只有杆 AB 的重力做功,所以系统的机械能守恒.初始时刻系统的动能 $T_0 =$

0, 末了时刻系统的动能为

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + \frac{1}{2} m_2 v_c^2 + \frac{1}{2} J_C^{AB} \omega^2 =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 3m v_0^2 + \frac{1}{2} m (v_0^2 + v_r^2 - 2v_0 v_r \cos \frac{\pi}{6}) +$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} m r^2 \omega^2 = \frac{133}{384} m r^2 \omega^2 \quad (4)$$

设半圆槽最低点, 也即末了时刻杆 AB 上 B 点所在的位置为零势能点. 则初始时刻系统的势能

$$V_0 = (r - \frac{\sqrt{3}}{4} r) m g = \frac{4 - \sqrt{3}}{4} m g r$$

末了时刻系统的势能

$$V_1 = \frac{1}{4} m g r$$

根据机械能守恒定律

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

有

$$\frac{4 - \sqrt{3}}{4} m g r = \frac{133}{384} m r^2 \omega^2 + \frac{1}{4} m g r \quad (5)$$

根据系统末了时刻的运动状态, 可知杆 AB 沿逆时针方向转动, 角速度方向垂直纸面向外. 化简式(5), 角速度大小为

$$\omega = \sqrt{\frac{96(3 - \sqrt{3})}{133} \frac{g}{r}} \quad (6)$$

3 用瞬时法求解杆 AB 的角速度

上一节给出了用动量守恒和机械能守恒求解杆 AB 角速度的方法. 本节将从系统运动瞬时状态的角度切入, 给出此题的另一种解法.

对系统做加速度分析, 以半圆槽为参考系, 选取质心 C 为动点. 设质心 C 的加速度为 \mathbf{a}_c , 牵连加速度为 \mathbf{a}_e , 相对切向加速度为 \mathbf{a}_r^{τ} , 相对法向加速度为 \mathbf{a}_r^n . 根据相对运动的知识有

$$\mathbf{a}_c = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r^{\tau} + \mathbf{a}_r^n \quad (7)$$

其中 $\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_0$ $\mathbf{a}_r^n = \omega^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r$

$$\mathbf{a}_r^{\tau} = \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r$$

ω 和 α 分别为杆 AB 的角速度和角加速度. 杆 AB 的转动角度为 φ 时, 假定各加速度方向如图 3 所示.

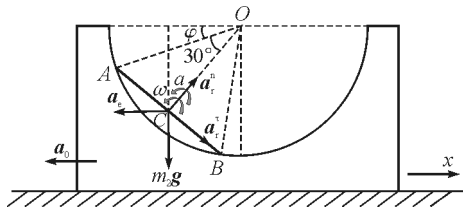


图 3 加速度分析

在系统运动的过程中, 半圆槽和杆 AB 组成的系统在水平方向不受外力, 根据质心运动定理可知

$$m_1 a_0 + m_2 \left[a_0 - a_r^n \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) - a_r^{\tau} \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) \right] = 0 \quad (8)$$

整理得

$$a_0 = \frac{\sqrt{3}}{8} \omega^2 r \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\sqrt{3}}{8} \alpha r \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) \quad (9)$$

动点 O 以相同的速度随半圆槽运动, 杆 AB 相对于动点 O 的动量矩 L_O^r 为

$$L_O^r = J_O \omega = \left[\frac{1}{12} m r^2 + m \left(\frac{\sqrt{3}}{2} r \right)^2 \right] \omega = \frac{5}{6} m r^2 \omega \quad (10)$$

杆 AB 的重力对动点 O 产生的力矩 M_O 为

$$M_O = m g \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) \quad (11)$$

对杆 AB 使用相对动点 O 的动量矩定理

$$\frac{dL_O^r}{dt} = M_O + \overrightarrow{OC} \times (-m_2 \mathbf{a}_0) \quad [1]$$

在垂直纸面方向上投影得到标量方程

$$\frac{5}{6} m r^2 \alpha = m g \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) + m a_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) \quad (12)$$

把式(9)代入式(12), 设 $\theta = \varphi + \frac{\pi}{6}$, 整理得

$$\left(\sin^2 \theta - \frac{40}{9} \right) \alpha + \omega^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{8\sqrt{3}g}{3r} \cos \theta = 0 \quad (13)$$

用 $\dot{\theta}$ 表示 ω , $\ddot{\theta}$ 表示 α . 作如下变换

$$\ddot{\theta} = \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \quad (14)$$

将式(14)代入式(13), 整理得

$$\left(\frac{40}{9} - \sin^2\theta\right)\dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} - \sin\theta \cos\theta \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{8\sqrt{3}g}{3r} \cos\theta \quad (15)$$

考察式(15)发现,等式左侧可以合并为

$$\frac{1}{2} \frac{d\left[\left(\frac{40}{9} - \sin^2\theta\right)\dot{\theta}^2\right]}{d\theta}$$

即

$$d\left[\left(\frac{40}{9} - \sin^2\theta\right)\dot{\theta}^2\right] = \frac{16\sqrt{3}g}{3r} \cos\theta d\theta \quad (16)$$

对式(16)进行积分,得到题目初始条件 $\theta|_{t=0} = \frac{\pi}{6}$,

$\dot{\theta}|_{t=0} = 0$ 下, θ 和 $\dot{\theta}$ 之间的关系

$$\left(\frac{40}{9} - \sin^2\theta\right)\dot{\theta}^2 = \frac{16\sqrt{3}g}{3r} \left(\sin\theta - \sin\frac{\pi}{6}\right) \quad (17)$$

末了时刻 $\theta = \frac{2\pi}{3}$, $\dot{\theta} = \omega$, 代入式(17)得到杆 AB

角速度 ω 的大小,沿逆时针方向,与第一种方法得到的结果相同。

4 基于 MATLAB 的数值模拟

为了清晰直观地了解该系统的运动规律,本节

通过 MATLAB 编程求解系统运动. 取 $\frac{g}{r} = 1$, 得到

杆 AB 的转角 φ 随时间变化的曲线,角速度 ω 随时间变化的曲线分别如图 4 和图 5 所示。

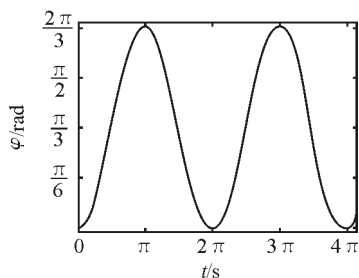


图 4 $\varphi-t$ 曲线

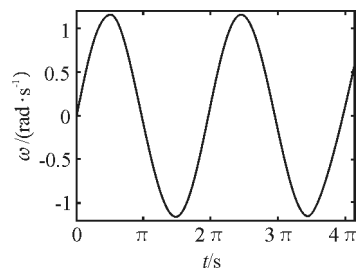


图 5 $\omega-t$ 曲线

杆 AB 的转动角度和角速度成周期性变化,且两者的周期相等,这也是系统的运动周期.系统在运动过程中满足机械能守恒,所以杆 AB 的最大转动角度为 $\frac{2\pi}{3}$,即杆 AB 的 B 端位于半圆槽右顶端的位置。

保持半圆槽和杆 AB 的尺寸不变,改变两者的质量比 $\frac{m_1}{m_2}$,做进一步讨论.重复瞬时法的推导过程,得到题目初始条件 $\theta|_{t=0} = \frac{\pi}{6}$, $\dot{\theta}|_{t=0} = 0$ 下 θ 和 $\dot{\theta}$ 的关系式

$$\left(\frac{10}{9} - \frac{1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \sin^2\theta\right) \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \frac{g}{r} \left(\sin\theta - \sin\frac{\pi}{6}\right) \quad (18)$$

由式(18)可知,杆 AB 的转动角度一定时,质量比 $\frac{m_1}{m_2}$ 增大,杆 AB 的角速度减小,因此系统的运动周期会增大.当 $\frac{m_1}{m_2} \rightarrow \infty$ 时,可以认为半圆槽固定不动,系统的运动周期收敛到它的最大值,运动周期随质量比的变化曲线如图 6 所示。

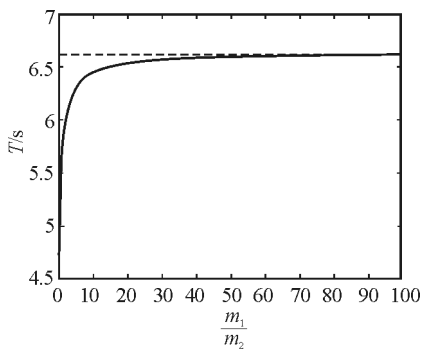


图 6 运动周期随质量比的变化曲线

5 结束语

本文通过两种方法解出了例题中杆 AB 的角速度,利用 MATLAB 数值模拟清晰直观地分析了系统的周期性运动,又讨论了半圆槽与均质细直杆的质量比对系统运动周期的影响,给出了均质细直杆在光滑半圆槽内运动的综合性研究。

参考文献

- 1 水小平,白若阳,刘海燕.理论力学教程[M].北京:电子工业出版社,2013.243