

“猎犬追狐狸”的大学物理解法

李开玮 李振华 刘顺彭

(广东理工学院智能制造学院 广东 肇庆 526100)

(收稿日期:2021-09-14)

摘要:猎犬追狐狸是一道比较经典的竞赛题目,从大学物理角度讨论该问题,求解了猎犬的运动时间及轨迹.

关键词:猎犬追狐狸 大学物理 定积分

1 问题描述

猎犬追狐狸是一个十分有趣的问题,深入研究可以延伸到如何拦截来袭导弹的问题,具有一定的启发意义.猎犬的初始加速度可以通过观察猎犬经过极短时间后,对速度求导得到^[1].更感兴趣的应该是猎犬追上狐狸需要的时间,以及轨迹问题.文献^[2]通过构造矢量的乘积并求导,使时间微分前面的系数为常数,再求积分的方法巧妙地求出了追上所需的时间;而文献^[3]另辟蹊径通过构造虚力做功的方法,使虚力的功率恒定,虚力的功又能简洁地求出来,这样来得到追击的时间,各有千秋.本文从大学物理的角度,利用运动分解结合定积分的知识

探讨猎犬追击时间和轨迹.

如图1所示,一只狐狸以不变速度 u 沿直线 AB 逃跑,一只猎犬以不变速率 v 追击狐狸,运动方向始终对准狐狸,某时刻狐狸在 F 点,猎犬在 D 点,相距 L ,且 $FD \perp AB$,问猎犬追上狐狸需要多长时间?

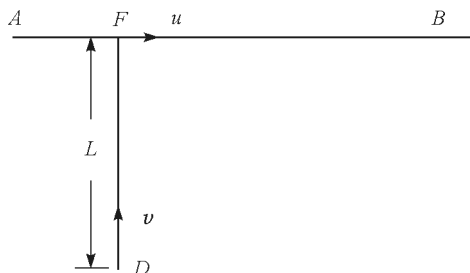


图1 猎犬追狐狸示意图

问题,经历从矛盾到统一的探究过程,激发学生的质疑与探索精神,使学生对知识的理解更深刻,对方法的选择与应用更娴熟与合理.

参考文献

1 余建刚.“小量近似”在高考和竞赛中的应用[J].理科考试研究,2019(19):37~39

2 张军.小量近似方法在竞赛中的应用[J].物理教学探讨,2005(20):37~39

3 董静雨.完全非弹性碰撞中的动能损失[J].物理通报,2018,37(7):44~45

4 李虎骝.质心运动定理及其应用[J].物理教师,1994(5):41~42

From Contradiction to Unity, Comprehensive Analysis of Lifted Rope Model on the 3 Opinions of Applied Mechanics

Yu Pan Ye Shengbo

(Zhejiang Cixi Middle School, Ningbo, Zhejiang 315300)

Abstract: "Rope lifting" model is a typical model for analyzing problems by using infinitesimal method in competition mechanics. Students found the different results were obtained by applying the viewpoint of impulse and momentum change, or obtained by the viewpoint of work and energy transformation. Starting from this contradiction, this paper deeply analyzes the problems of the physical model constructed from the viewpoint of work and energy conversion, and gives a unified and self consistent result after modifying the model. Finally, the correctness of the results is verified again from the viewpoint of force and motion, students have fully experienced the unified beauty of physics.

Key words: three viewpoints of mechanics; rope lifting model; infinitesimal method

2 问题分析

如图2所示,为猎犬运动的大致轨迹图,运动中某时刻,猎犬运动方向与AB夹角为 θ ,根据图像可知,猎犬与狐狸靠近的速度为 $v - u \cos \theta$,初始时猎犬与狐狸相距 L ,当猎犬追上狐狸时,距离为零,设猎犬用时 T ,因此

$$\int_0^T (v - u \cos \theta) dt = L \quad (1)$$

初始时猎犬与狐狸水平方向距离为零,猎犬追上狐狸时水平方向距离仍为零,猎犬水平方向分速度为 $v \cos \theta$,因此可得

$$\int_0^T (v \cos \theta - u) dt = 0 \quad (2)$$

将式(1)两边乘以 v ,式(2)两边乘以 u ,相加可得

$$\int_0^T (v^2 - u^2) dt = vL \quad (3)$$

$$\text{由式(3)可得 } T = \frac{vL}{v^2 - u^2}.$$

只要猎犬速率大于狐狸,就一定能追上狐狸.因此猎犬运动路程为

$$S = vt = \frac{v^2 L}{v^2 - u^2} \quad (4)$$

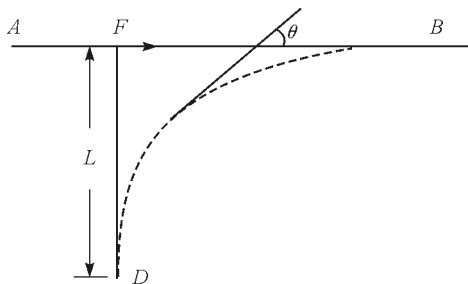


图2 猎犬运动轨迹

关于猎犬的运动轨迹,建立直角坐标系如图3所示.

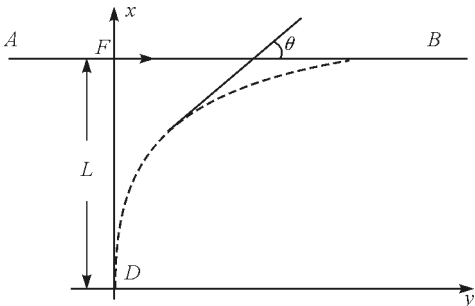


图3 坐标系示意图

根据几何图像可得

$$\cot \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{ut - y}{L - x} \quad (5)$$

为方便处理,令 $\cot \theta = p$,由式(5)可得

$$p(L - x) = ut - y \quad (6)$$

式(6)两边对 x 求导得

$$\frac{dp}{dx}(L - x) = u \frac{dt}{dx} \quad (7)$$

式(7)有3个变量,把 $\frac{dt}{dx}$ 转化一下

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}\right)^2 \quad (8)$$

由式(8)可得 $\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{1+p^2}{v^2}}$ 代入式(7)分离变量得

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dx}{L-x} \frac{u}{v} \quad (9)$$

$$\ln(p + \sqrt{1+p^2}) = \frac{u}{v} \ln\left(\frac{L}{L-x}\right) \quad (10)$$

由式(10)可得

$$p = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{L}{L-x}\right)^{\frac{u}{v}} - \left(\frac{L}{L-x}\right)^{-\frac{u}{v}} \right] \quad (11)$$

代入 $p = \frac{dy}{dx}$,令 $\gamma = \frac{u}{v}$,解得

$$y = \frac{1}{2} \left[\frac{(L-x)^{1+\gamma}}{(1+\gamma)L^\gamma} - \frac{L^\gamma(L-x)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right] + \frac{\gamma L}{1-\gamma^2} \quad (12)$$

3 结束语

通过分析猎犬和狐狸的径向和水平方向的相对速度、距离变化,作定积分,消去角度变量,能够简洁地求出猎犬追击时间,与文献[2,3]结果一致.该问题的中学和大学解法对比可以使学生对大学物理有一个更加深刻的认识,从中学过渡到大学学习阶段.

参考文献

- 1 许冬保. 猎犬追狐狸试题的多视角分析[J]. 中学物理, 2012,30(21):49~50
- 2 陈泽,陈娜娜,支启军. 谈“猎犬追上狐狸的时间”另一求法[J]. 物理教师,2013,34(10):92
- 3 彭定辉. 虚力做功求解“猎犬追上狐狸的时间”[J]. 物理教师,2021,42(5):82~83