



行波的旋转矢量法和驻波的可视化*

周群益

(广州理工学院通识教育学院 广东 广州 510540)

肖桂英

(广州理工学院机电工程学院 广东 广州 510540)

王培颖

(广州理工学院通识教育学院 广东 广州 510540)

莫云飞

(长沙学院电子信息与电气工程学院 湖南 长沙 410022)

周丽丽

(赣南医学院医学信息工程学院 江西 赣州 341000)

(收稿日期:2021-11-13)

摘要:根据质点的运动方程建立行波的波动方程,用曲面说明波动方程,用质点振动的旋转矢量法说明行波的传播过程.用曲线说明左右行波和驻波的运动过程,用曲面表示驻波的动能、势能和机械能的分布规律.用曲线表示各时刻的能流密度,说明了能流密度的方向与机械能之间的关系.

关键词:行波 驻波 旋转矢量法 机械能 能流密度 可视化

旋转矢量法可以直观地描述简谐振动,但是并没有文献用于描述简谐波.驻波是两列振幅相等、频率相同、传播方向相反的简谐波叠加的结果.有文献用旋转矢量法研究驻波的特征^[1~4],虽然说明了一些问题,但是用旋转矢量法研究驻波较为困难,绘制的图像也不够具体形象.

有文献研究了驻波的能量^[5~12],推导了能量密度公式和能流密度公式,但是没有用图像说明问题.还有文献用 MATLAB 研究驻波的能量^[13],方法很好,若充分发挥 MATLAB 的可视化功能,则可进一步改进.

本文从简谐振动公式推导了简谐波的公式,用曲面说明简谐波的分布规律.用振动的旋转矢量法的动画说明了简谐波的传播过程,用动画的截图说明了驻波的形成过程,用曲面表示了能量和能流密度的分布规律,用动画的截图说明了能流的方向与能量分布之间的关系.

1 简谐振动和简谐波的旋转矢量法

1.1 波形曲面和曲线

如图1所示,设一个质点在原点做简谐振动,振幅为 A ,角速度为 ω ,初相为 φ_0 .旋转矢量 A 顺时针旋转, ω 的方向垂直纸面向里.

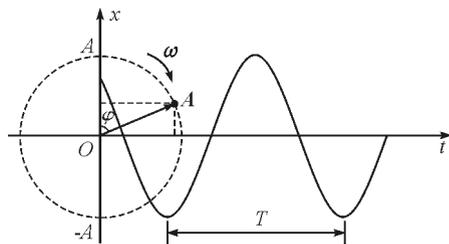


图1 简谐振动的旋转矢量图

经过时间 t , 相位 $\varphi = \omega t + \varphi_0$, 位移为

$$x = A \cos \varphi = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (1)$$

这是质点的运动方程,其周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2)$$

* 广东省高校科研特色创新项目,项目编号:2020KTSCX209

作者简介:周群益(1955-),男,硕士,副教授,主要从事大学物理教学和凝聚态研究.

通讯作者:肖桂英(1963-),女,工程师,主要从事机械设计制造及自动化、工业机器人设计及制造.

设波沿着 Ox 方向传播,波速为 u ,则波长为

$$\lambda = uT = \frac{2\pi u}{\omega} \quad (3)$$

当波从原点传到 r 处时,经过的时间 $t_0 = \frac{r}{u}$, r 处的位移为

$$x = A\cos[\omega(t - t_0) + \varphi_0] = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{u}\right) + \varphi_0\right] \quad (4)$$

这是右行波的波动方程,是 t 和 r 的二元函数, ω 和 u 是参数, φ_0 是固定的参数.可见:质点的位置 r 越远,位相就落后得越多.波数为 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$,波动方程用圆频率和波数表示最为简单

$$x(t, r) = A\cos(\omega t - kr + \varphi_0) \quad (5)$$

用周期和波长可以表示为

$$x(t, r) = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) + \varphi_0\right] \quad (6)$$

此式便于画图.

取周期 T 为时间 t 的单位,取波长 λ 为坐标单位,取振幅 A 为位移单位,则无量纲的波动方程为

$$x^*(t^*, r^*) = \frac{x(t, r)}{A} = \cos[2\pi(t^* - r^*) + \varphi_0] \quad (7)$$

利用 MATLAB 的 surf 指令可画曲面,利用 plot3 指令可画三维曲线^[14].

如图 2 所示,取 $\varphi_0 = 0$,右行波的位移是波浪形的曲面.当 $r = 0$ 时,可得原点处质点的运动方程曲线,如实线所示;当 $t = 0$ 时,可得所有质点在初始时刻的波形曲线,如虚线所示.当 $r = 2.5\lambda$ 时,可得该处质点的运动方程曲线;当 $t = 1.5T$ 时,可得所有质点在该时刻的波形曲线.当 $r = 2.5\lambda, t = 1.5T$ 时,质点的位移 $x = 1A$.

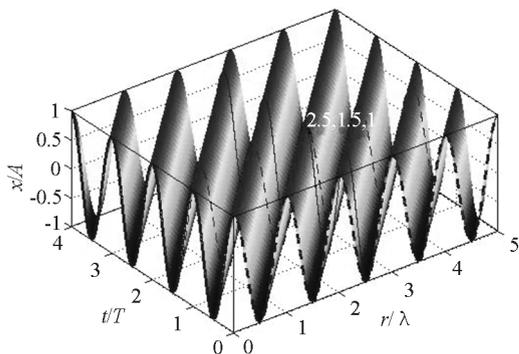


图2 波动方程曲面

1.2 波的传播的旋转矢量动画

利用 MATLAB 的计算和图形功能,我们设计了一个程序,可演示旋转矢量法与右行波传播的动画,见附录^[14].

执行程序,初始时刻的旋转矢量和波形曲线如图 3 所示,每一点的旋转矢量都在不同的 tOx 平行平面上,处于竖直或水平位置.

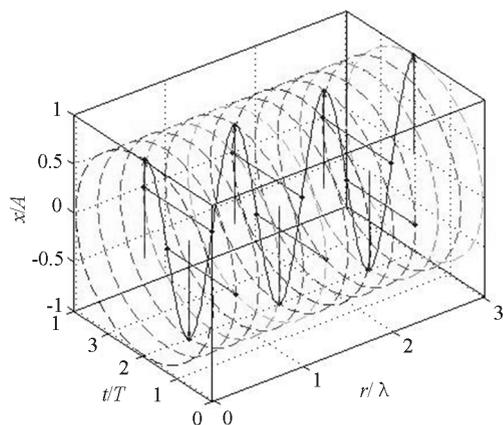


图3 初始时刻的各点的旋转矢量和波形曲线

按任意键(例如空格键或回车键),旋转矢量和波形曲线如图 4 所示.所有矢量都旋转了一个角度,每一条矢量线与两条虚线组成一个直角三角形,矢量线在 Ox 轴上的投影就表示质点的位移,行波同时向右传播了一定的距离.波的传播方向与 ω 的方向相反.不断按任意键,各点的直角三角形随着矢量的旋转而改变,行波不断向右传播.当矢量旋转一周后,再按任意键,矢量就持续旋转,行波持续右行,直到按 ESC 键为止.

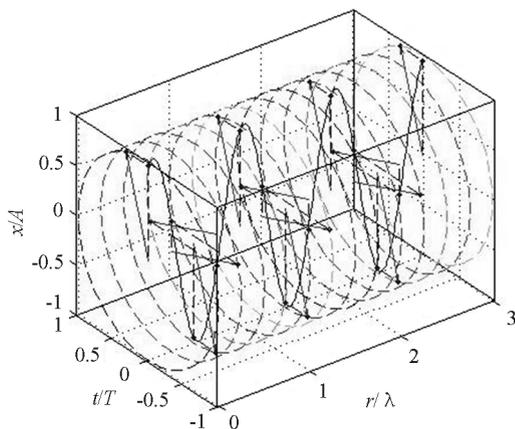


图4 某时刻各点的旋转矢量和波形曲线

修改程序也可以用旋转矢量法演示左行波的视频,读者不妨一试。

2 驻波的特点

2.1 驻波的位移

两列振幅相等、频率相同、传播方向相反的波的方程为(取初相 $\varphi_0 = 0$)

$$x_1(t, r) = A \cos(\omega t - kr) \quad (8)$$

$$x_2(t, r) = A \cos(\omega t + kr) \quad (9)$$

其中, $x_1(t, r)$ 是右行波, $x_2(t, r)$ 是左行波. 行波的特点是包含因子 $(\omega t \pm kr)$. 两波叠加的结果为

$$x(t, r) = x_1(t, r) + x_2(t, r) = 2A \cos kr \cos \omega t \quad (10)$$

由于公式中并不包括因子 $(\omega t \pm kr)$, 这种波既不右行, 也不左行, 称为驻波. 公式中的 $|2A \cos kr|$ 是振幅, 由坐标决定. 当 $kr = \frac{\pi}{2} + n\pi (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时

$$r = \frac{(1 + 2n)\lambda}{4}$$

振幅为零, 此处称为波节. 除了波节之外, 其他各点做简谐振动. 当 $kr = n\pi (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时

$$r = \frac{n\lambda}{2}$$

振幅最大, 即 $2A$, 此处称为波腹. 其他点的振幅介于零到 $2A$ 之间.

取周期 T 为时间 t 的单位, 取波长 λ 为坐标单位, 取振幅 A 为位移单位, 则无量纲的行波方程为

$$x_1^*(t^*, r^*) = \frac{x_1(t, r)}{A} = \cos 2\pi(t^* - r^*) \quad (11)$$

$$x_2^*(t^*, r^*) = \frac{x_2(t, r)}{A} = \cos 2\pi(t^* + r^*) \quad (12)$$

利用 MATLAB 的动画功能, 可演示左右行波传播的动画以及驻波形状变化的动画^[14].

取时间 $t = n \frac{T}{8} (n=0, 1, \dots, 8)$, 右行波(虚线),

左行波(点虚线)和驻波(实线)的截图如图 5 所示, 各种教材对驻波的形状都有详细的说明, 这里不多述. 在右行波和左行波传播的过程中, 驻波的波节始终不动, 波腹的运动幅度最大; 相邻波节之间各质点是同相的; 波节两边的各质点是反相的.

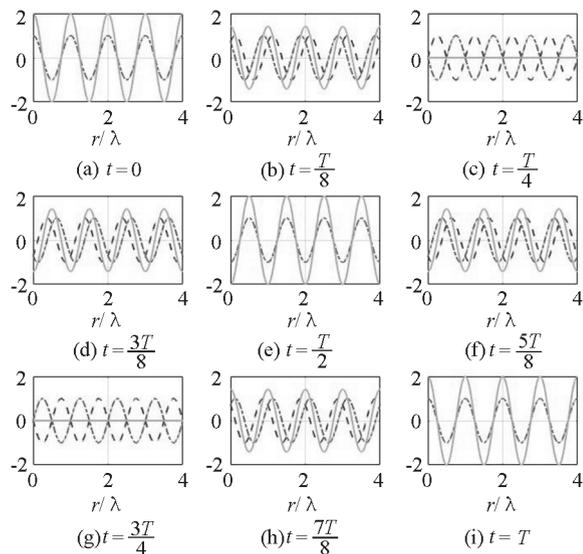


图 5 右行波, 左行波和驻波的截图

2.2 驻波的能量和能量密度

设媒质是弹性均匀媒质, 其质量体密度为 ρ , 在位置 r 处取一个体积元 ΔV , 其质量 $\Delta m = \rho \Delta V$. 质元的速度为

$$v = \frac{\partial x}{\partial t} = -2A\omega \cos kr \sin \omega t \quad (13)$$

质元的动能为

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \Delta m v^2 = 2\rho A^2 \omega^2 \Delta V \cos^2 kr \sin^2 \omega t \quad (14)$$

纵波的杨氏弹性模量 $Y = \rho u^2$, 由于 $u = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$, 所以

质元的势能为

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} Y \Delta V \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 = 2\rho A^2 \omega^2 \Delta V \sin^2 kr \cos^2 \omega t \quad (15)$$

对横波则要将杨氏模量 Y 改为切变模量 G , 结果完全相同. 质元的机械能为

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p =$$

$$2\rho A^2 \omega^2 \Delta V (\cos^2 kr \sin^2 \omega t + \sin^2 kr \cos^2 \omega t)$$

利用半角公式可得

$$\Delta E = \rho A^2 \omega^2 \Delta V (1 - \cos 2kr \cos 2\omega t) \quad (16)$$

质元的动能、势能和机械能都是关于坐标和时间的二元函数, 任何一个质元的能量都随时间做周期性的变化, 其圆频率是驻波圆频率的 2 倍. 由于能量公式中并不包括因子 $(\omega t \pm kr)$, 所以能量并不随波传播.

在一个周期内, 质元动能的平均值为

$$\overline{\Delta E_k} = \frac{1}{T} \int_0^T \Delta E_k dt = \rho A^2 \omega^2 \Delta V \sin^2 kr \quad (17)$$

质元势能的平均值为

$$\overline{\Delta E_p} = \frac{1}{T} \int_0^T \Delta E_p dt = \rho A^2 \omega^2 \Delta V \cos^2 kr \quad (18)$$

机械能的平均值为

$$\overline{\Delta E} = \overline{\Delta E_k} + \overline{\Delta E_p} = \rho A^2 \omega^2 \Delta V \quad (19)$$

可见,一个质元的动能和势能的平均值与坐标有关,平均动能大的质元,其平均势能一定小,但是机械能是常数.

在波节处, $\cos kr = 0, \sin kr = \pm 1$, 质元的动能为 $\Delta E_k = 0$, 势能为

$$\Delta E_p = 2\rho A^2 \omega^2 \Delta V \cos^2 \omega t \quad (20)$$

这是因为在波节处的质元静止而相对形变会随着时间发生改变.

在波腹处, $\sin kr = 0, \cos kr = \pm 1$, 质元的势能为 $\Delta E_p = 0$, 动能为

$$\Delta E_k = 2\rho A^2 \omega^2 \Delta V \sin^2 \omega t \quad (21)$$

这是因为在波腹处的质元不发生相对形变而速度随着时间发生改变.

单位体积内的能量称为能量密度,动能、势能和机械能的能量密度分别用 w_k, w_p 和 w 表示. 机械能的能量密度为

$$w = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 (1 - \cos 2kr \cos 2\omega t) \quad (22)$$

能量密度也是关于坐标和时间的二元函数. 在垂直于 Or 方向取一个截面 S , 在 r 处取一个体积元 $dV = Sdr$, 在波节与波腹之间的机械能为

$$W = \int_0^{\lambda/4} w dV = \frac{\lambda}{4} \rho A^2 \omega^2 S \quad (23)$$

可见,波节与波腹之间的机械能是恒定的,不随时间改变.

取周期 T 为时间单位,取波长 λ 为坐标单位,取最大能量 $\Delta E_m = 2\rho A^2 \omega^2 \Delta V$ 为能量单位,就能将动能和势能无量纲化,两者之和就是无量纲的机械能,简称能量.

取最大能量密度 $w_m = 2\rho A^2 \omega^2$ 作为能量密度的单位,则无量纲的能量密度就等于无量纲的能量.

(1) 驻波质元的动能和动能密度如图6所示,质元的动能随着时间的改变而改变. 在波节上 $r = (1 +$

$2n) \frac{\lambda}{4} (n=0, 1, 2, \dots)$, 动能为零; 当 $t = \frac{nT}{2} (n=0, 1, 2, \dots)$ 时, 动能也为零. 在波腹上 $r = \frac{n\lambda}{2} (n=0, 1, 2, \dots)$, 且当 $t = \frac{T}{4} + n \frac{T}{2} (n=0, 1, 2, \dots)$ 时, 动能最大.

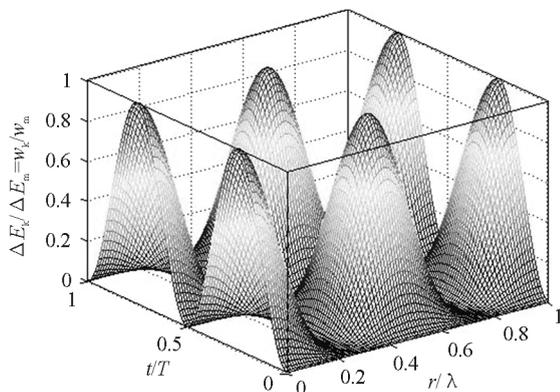


图6 驻波的动能和动能密度

(2) 驻波质元的势能和势能密度如图7所示. 在波腹上 $r = n \frac{\lambda}{2} (n=0, 1, 2, \dots)$, 势能为零; 当 $t = \frac{T}{4} + n \frac{T}{2} (n=0, 1, 2, \dots)$ 时, 势能也为零. 在波节上 $r = (1 + 2n) \frac{\lambda}{4} (n=0, 1, 2, \dots)$, 且当 $t = \frac{T}{4} + n \frac{T}{2} (n=0, 1, 2, \dots)$ 时, 势能最大.

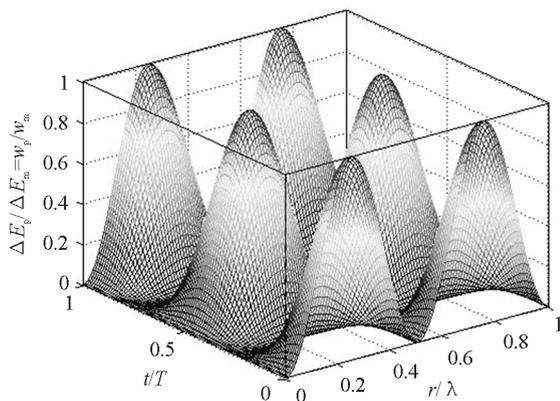


图7 驻波质元的势能和势能密度

(3) 驻波质元的能量和能量密度(机械能和机械能密度)如图8所示,质元的动能与势能的“峰”是交错出现的,因而能量曲面呈现多“峰”多“谷”形状. 在动能或势能最大的地方,能量最大;在动能和势能最小的地方,能量最小. 移“峰”填“谷”,平均能量为 $\frac{\Delta E_m}{2}$.

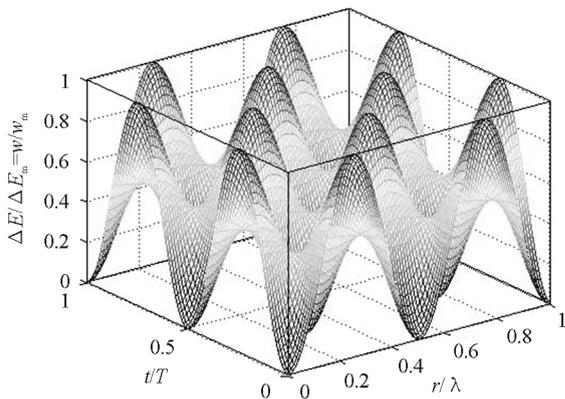


图8 驻波质元的机械能和机械能密度

2.3 驻波的能量密度

对于右行波来说,一个质元的动能与势能相等,可以证明其能量(机械能)为

$$\Delta E_1 = \rho A^2 \omega^2 \Delta V \sin^2(\omega t - kr) \quad (24)$$

单位体积内的能量就是能量密度.因此,右行波的能量密度为

$$w_1 = \frac{\Delta E_1}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kr) \quad (25)$$

沿着波的传播方向单位时间内穿过单位面积的能量称为能流密度,其大小等于波速与能量密度之积.右行波的能流密度为

$$I_1 = u w_1 = u \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kr) \quad (26)$$

同理,左行波的能流密度为

$$I_2 = u w_2 = u \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + kr) \quad (27)$$

驻波的能流密度为

$$I = I_1 - I_2 =$$

$$u \rho A^2 \omega^2 [\sin^2(\omega t - kr) - \sin^2(\omega t + kr)]$$

利用平方差公式,展开上式再化简,可得

$$I = u \rho A^2 \omega^2 \sin 2kr \sin 2\omega t \quad (28)$$

驻波的能流密度是关于坐标和时间的二元函数,随时间做周期性变化,其圆频率是驻波圆频率的2倍.

由于公式中并不包括因子 $(\omega t \pm kr)$,所以驻波的能流并不随波传播.当 $r = \frac{n\lambda}{4} (n=0,1,2,\dots)$ 时, $I=0$,

说明驻波的能流不能穿过波节和波腹.当 $t = \frac{nT}{4} (n=0,1,2,\dots)$ 时, $I=0$,除了这些时间点之外,能量可在相邻波节和波腹之间来回流动.显然,最大能流密度为 $I_m = u \rho A^2 \omega^2$.在半个周期内驻波的平均能流密度为

$$\bar{I} = \left(\frac{T}{2}\right)^{-1} \int_0^{\frac{T}{2}} I dt =$$

$$u \rho A^2 \omega^2 \sin 2kr \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin 2\omega t dt = 0 \quad (29)$$

说明驻波并不传播能量.

取周期 T 为时间单位,取波长 λ 为坐标单位,取最大能流密度 I_m 为能流密度单位,就能将右行波和左行波以及驻波的能流密度无量纲化.

利用左右行波和驻波完全相同的方法,可以演示3个能流密度的动画.

取时间 $t = n \frac{T}{40} (n=0,2,5,8,10,12,15,18,$

$20)$,右行波能流密度(虚线),左行波能流密度(点虚线)和驻波能流密度(实线)的截图如图9所示.

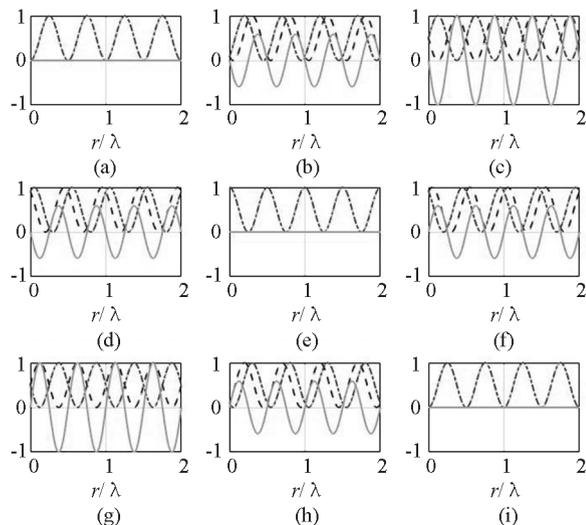


图9 右行波、左行波和驻波的能流密度截图

第一行从左到右是子图(a)、(b)、(c),第二行是子图(d)、(e)、(f),第三行是子图(g)、(h)、(i).当 $I > 0$ 时,表示能量向右流动;当 $I < 0$ 时,表示能量向左流动.子图(a)说明 $t=0$ 时能量不流动,由图8可知, $t=0$ 时波节的能量最大,波腹的能量最小;子图(b)、(c)、(d)说明在时间 $\left(0, \frac{T}{4}\right)$ 内能量向波腹流动;子图(e)说明 $t = \frac{T}{4}$ 时能量不流动,结合图8可知, $t = \frac{T}{4}$ 时波腹的能量最大,波节的能量最小;子图(f)、(g)、(h)说明在时间 $\left(\frac{T}{4}, \frac{T}{2}\right)$ 内能量向波节流动;子图(i)说明 $t = \frac{T}{2}$ 时能量不流动,由图8可知,

$t = \frac{T}{2}$ 时波节的能量最大,波腹的能量最小. 这样的过程循环进行,周期为 $\frac{T}{2}$. 不论何时,波节和波腹的能量密度都为零. 能量在波节和波腹之间来回流动并不穿过波节和波腹,说明驻波的能量“封锁”在波节和波腹之间.

3 结束语

行波和驻波是机械波中的两个典型问题,波的传播和波形改变都可以用图形和动画表示. 行波不但可以用曲面表示,还可以用旋转矢量法演示. 在波节上质元的动能为零,势能随时间做周期性变化;在波腹上质元的势能为零,动能随时间做周期性变化. 能量可以在相邻波节和波腹之间周期性流动,但不会传播. 当能量向波节或波腹流动时,波节或波腹的能量就会增加,反之则减少.

学科交叉是学科发展的一个重要方向. MATLAB 程序设计是一门学科,系统掌握这门知识有助于我们研究物理问题,也有助于物理教学. 本文附录中的程序可供参考,相信有助于读者的教学和研究.

参考文献

- 1 罗治安,段永法. 用旋转矢量图分析驻波特征[J]. 物理通报,1997(10):38
- 2 李久会,张俊峰,高明旭,等. 用旋转矢量法研究驻波[J].

- 延边大学学报(自然科学版),2001,27(3):313 ~ 314
- 3 费向阳. 旋转矢量图形与驻波问题的研究[J]. 电大理工,2007,232(3):55 ~ 57
- 4 杨庆怡,刘奕新,郭进. 用振动旋转矢量和波动旋转矢量描述驻波波形[J]. 物理与工程,2009,19(3):57 ~ 58
- 5 罗万前. 驻波的能量分布[J]. 四川师院学报(自然科学版),1981(2):47 ~ 54
- 6 许明尧. 驻波能量分析及应用[J]. 四川大学学报(自然科学版),1989,43(1):71 ~ 75
- 7 邓尚民,袁玉珍. 驻波的能量分析[J]. 山东工程学院学报,1996,10(3):38 ~ 40
- 8 杨学军. 驻波的能量[J]. 物理通报,1998(3):3 ~ 4
- 9 宋德山,张秀珍. 驻波的能量分析[J]. 天中学刊,2002,17(5)
- 10 郭建军. 关于驻波能量的分析[J]. 大学物理,2005,24(5):23 ~ 25
- 11 吴颖,谢远亮. 关于驻波能量的图示法分析[J]. 沈阳航空工业学院学报,2007,24(1):84 ~ 86
- 12 吴波英,王军延,付伯桥,等. 利用波动图进行驻波的位相和能量特征分析[J]. 湖北工程学院学报,2021,41(3):36 ~ 39
- 13 徐宗瑜,胡小克. 驻波的能量分析与 MATLAB 模拟[J]. 物理通报,2012(11):31 ~ 34
- 14 周群益,侯兆阳,刘让苏. MATLAB 可视化大学物理学(第2版)[M]. 北京:清华大学出版社,2015.5 ~ 10,192 ~ 194,245 ~ 247

附录:

wave2. m

% 简谐波传播的旋转矢量法的动画(右行波)

clear,rm = 3;r = 0:0.01:rm;% 清除变量,最大横坐标,横坐标向量

th = (0:100)/100 * 2 * pi;r0 = 0:0.25:rm;% 角度向量,圆心横坐标向量

[R0,TH] = meshgrid(r0,th);x = cos(-2 * pi * r);% 圆心横坐标和角度矩阵,波的初始位移

figure,h = plot3(r,r * 0,x,'LineWidth',1);% 建立图形窗口,画初始波形曲线并取句柄

hold on,plot3(R0,cos(TH),sin(TH),'—','LineWidth',1)% 保持图像,画圆族

xr = cos(-2 * pi * r0);yr = sin(-2 * pi * r0);% 矢量相对纵坐标和横坐标

fori = 1:length(r0)% 按圆心循环

hr(i) = quiver3(r0(i),0,0,0,yr(i),xr(i),0,'LineWidth',1);% 画箭头并取句柄

ha(i) = plot3([r0(i);r0(i)],[0;0],[0;xr(i)],'—');% 画竖直线并取句柄

hb(i) = plot3([r0(i);r0(i)],[0;yr(i)],[xr(i);xr(i)],'. —');% 画水平线并取句柄

end% 结束循环

axis equal,grid,box on,fs = 14;% 使轴相等,加网格,加框,字体大小

xlabel('\it r/\lam bda','FontSize',fs)% 横坐标标签

```

ylabel('\itt/T','FontSize',fs)% 纵坐标标签
xlabel('\itx/A','FontSize',fs)% 竖坐标标签
title('右行简谐波传播的旋转矢量法的动画','FontSize',fs)% 显示标题
pause,n = 0;nn = 5;5;100;dt = 0.01;% 暂停,计数器清零,整数向量,时间间隔
while 1% 无限循环
    n = n + 1;t = n * dt;x = cos(2 * pi * (t - r));% 计数器加 1,下一时刻,波的位移
    set(h,'ZData',x)% 设置波的竖坐标
    for i = 1:length(r0)% 按圆心循环
        xr = cos(2 * pi * (t - r0(i)));yr = sin(2 * pi * (t - r0(i)));% 纵,竖坐标
        set(hr(i),'VData',yr,'WData',xr)% 设置矢量坐标
        set(ha(i),'ZData',[0,xr])% 设置竖直线坐标
        set(hb(i),'YData',[0,yr],'ZData',[xr,xr])% 设置水平线坐标
    end,drawnow% 结束循环,刷新屏幕
    L = nn == n;if any(L),pause,end% 逻辑值,有一个逻辑真则暂停(为了观察)
    if get(gcf,'CurrentCharacter') == char(27),break,end% 按 ESC 键退出循环
end% 结束循环

```

Rotation Vector Method of Traveling Wave and Visualization of Standing Wave

Zhou Qunyi

(College of General Education,Guangzhou Institute of Science and Technology,Guangzhou,Guangdong 510540)

Xiao Guiying

(College of Mechanical and Electrical Engineering,Guangzhou Institute of Science and
Technology,Guangzhou,Guangdong 510540)

Wang Peiying

(College of General Education,Guangzhou Institute of Science and Technology,Guangzhou,Guangdong 510540)

Mo Yunfei

(School of Electronic Information and Electrical Engineering,Changsha University,Changsha 410022)

Zhou Lili

(School of Medical and Information Engineering,Gannan Medical University,Ganzhou,Jiangxi 341000)

Abstract: The wave equation of the traveling wave is established according to the motion equation of the particle, the wave equation is illustrated by the curved surface, and the propagation process of the traveling wave is illustrated by the rotation vector method of the particle vibration. The motion process of the left and right traveling wave and the standing wave is illustrated by the curve, and the distribution law of the kinetic energy, potential energy and mechanical energy of the standing wave is represented by the curved surface. The energy flow density at each time is represented by the curve, The relationship between the direction of energy flow density and mechanical energy is explained.

Key words: traveling wave; standing wave; rotation vector method; mechanical energy; energy flow density; visualization