大学物理教学

安培环路定理在一段有限长载流导线磁场中的应用

苗　琦　　范奕泽　　陶明杰　　任　元
（航天工程大学基础部　北京　101416）

（收稿日期：2021－11－17）

摘　要：安培环路定理是电磁场需要遵循的基本定理. 以一段有限长电流为例，仅从物理实际和概念出发，避免假设和复杂的数学推导，解释了常常有学生认为安培环路定理在某些磁场中不成立的错误认识，指出在考虑了包含位移电流在内的全电流时，安培环路定理总是成立的，并推导出了一段电流磁场的位移电流.

关键词：安培环路定理；有限长载流导线；位移电流

安培环路定理是电磁场的重要定理，是电磁场遵循的基本规律. 它揭示电磁场是涡旋场的性质，给出了磁场强度与电流的定量关系. 其数学表达式

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum_{L_{内}} I_i$$

其中 L 是磁场中的闭合回路，称为安培环路，表达式左边 $\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 称为磁场环流，I_i 是环路内的电流[1-2]. 由于很多学生对该定理理解不全面，导致将该定理用于一段电流时出现矛盾，认为该定理在一段电流磁场中不成立. 多年来有大量的文章从不同角度尝试解决这一问题，比如在给定理加上修正项[3]；或构造闭合电流[4-5]，都取得了成功，但是方法不够简便，涉及大量的数学推导和假设，学生很难理解也不便从物理意义上接受.

本文针对这一问题，从物理实际和概念出发，讨论安培环路定理并将其用于一段电流产生的磁场中.

1　安培环路定理用于一段电流时出现的问题

如图 1 所示，ab 为一段载流导线，电流强度为 I，在距导线距离为 r 的位置处取一闭合圆环作为安培环路.

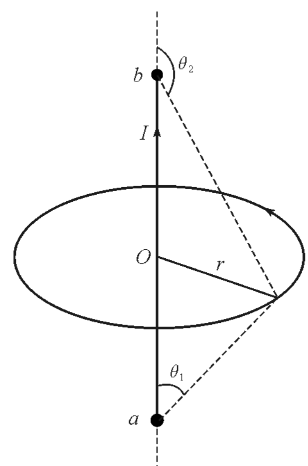

图 1　一段有限长电流的磁场

根据毕奥-萨伐尔定律，环路上各点的磁感应强度 $B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$、磁场强度

$$H=\frac{B}{\mu_0}=\frac{I}{4\pi r}(\cos\theta_1-\cos\theta_2) \tag{1}$$

此段电流磁场在环路上的环流

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_L \frac{I}{4\pi r}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)\,\mathrm{d}l=\frac{I}{2}(\cos\theta_1-\cos\theta_2) \tag{2}$$

只有当直电流无限长时，$\theta_1\to 0$、$\theta_2\to\pi$，此种情形下 $\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=I$，安培环路定理成立. 一般情况下，对于有限长的电流，上式不成立. 由此很多学生认为

安培环路定理对一段电流不成立.

导致这一错误认识的根本原因是一段有限长电流是不闭合的.随着带电粒子的宏观定向运动,在导线两端必然会堆积起等量的正、负电荷,随着电荷量 q 的变化,将在其周围激发变化的电场,从而激发位移电流;空间既包含导线上的传导电流也包含位移电流.

2　安培环路定理在一段电流上的应用

根据麦克斯韦电磁场理论,位移电流 $I_{\mathrm{d}}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$,式中 $\int_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 是通过电场中以环路 L 为边界的任意曲面的电位移通量 Φ_D,曲面上的电位移通量对时间的变化率 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 即位移电流.

图 2 中,面 S 和面 S' 是距导线距离为 r 的安培环路所围的圆曲面和任意曲面,它们构成的闭合曲面包围了电流流入端,假设某一瞬时该电流流入端堆积的电荷为 $+q$.根据高斯定理,闭合面上的电位移通量

$$\Phi_D=\oint_{S+S'}\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=+q$$

而根据电位移通量定义

$$\Phi_D=\int_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

电荷 $+q$ 在 S 面上的电位移通量

$$\Phi_{D(+q)}=\frac{\Omega_{S(+q)}}{4\pi}\cdot(+q)$$

式中 $\Omega_{S(+q)}$ 为面 S 对电流端点 $+q$ 张开的立体角.

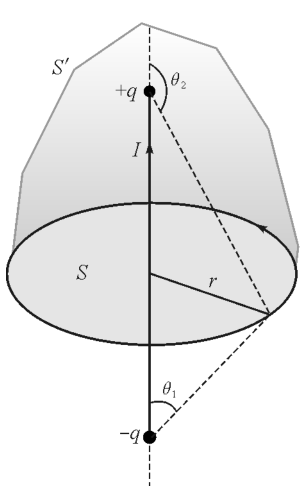

图 2　有限长电流的安培环路所围曲面

立体角有正有负之分,按照立体角的定义 $\mathrm{d}\Omega=\dfrac{\boldsymbol{e}_r\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{r^2}$ 和环路绕行方向的规定,与环路绕行方向成右手螺旋关系的方向为环路所围曲面的正方向,电流端点在曲面正方向的,曲面对该端点张开的立体角为负,电流端点在曲面反方向的,曲面对该端点张开的立体角为正.如图3所示,环路绕行方向为逆时针,对于 S 面,电流流出端 $-q$ 在其反方向,$\Omega_{S(-q)}>0$;电流流入端 $+q$ 在其正方向,$\Omega_{S(+q)}<0$.

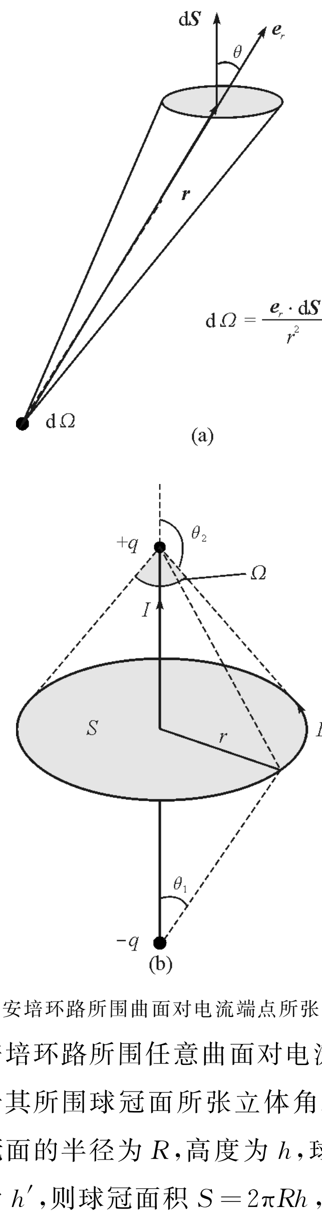

图 3　安培环路所围曲面对电流端点所张的立体角

由于安培环路所围任意曲面对电流端点所张立体角都等于其所围球冠面所张立体角.假设安培环路所围球冠面的半径为 R,高度为 h,球冠底面到球心的距离为 h',则球冠面积 $S=2\pi Rh$,立体角

$$\Omega=\frac{S}{R^2}=\frac{2\pi h}{R}=\frac{2\pi(R-h')}{R}=2\pi(1-\cos\theta)\tag{3}$$

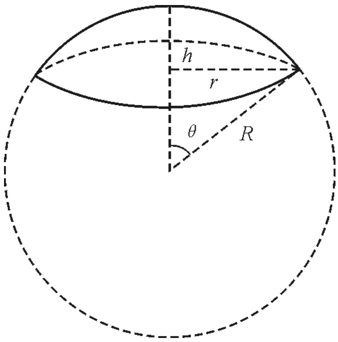

图 4　立体角的推导

根据式(3),图 2 中面 S 对电流流出端 $-q$ 和流入端 $+q$ 所张立体角分别为

$$\Omega_{S(-q)} = 2\pi(1-\cos\theta_1) \tag{5}$$

$$\Omega_{S(+q)} = -2\pi[1-\cos(\pi-\theta_2)] = -2\pi(1+\cos\theta_2) \tag{6}$$

则电流端点的电荷 $-q$、$+q$ 激发的电场通过面 S 上的电位移通量

$$\Phi_D = \Phi_{D(-q)} + \Phi_{D(+q)} = \frac{\Omega_{S(-q)}}{4\pi}(-q) + \frac{\Omega_{S(+q)}}{4\pi}(+q) = -\frac{q}{2}(2-\cos\theta_1+\cos\theta_2) \tag{7}$$

穿过环路 L 的位移电流

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = -\frac{1}{2}(2-\cos\theta_1+\cos\theta_2)\frac{dq}{dt} = -\frac{I}{2}(2-\cos\theta_1+\cos\theta_2) \tag{8}$$

则环路所围全电流

$$I + I_d = \frac{I}{2}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \tag{9}$$

对于图 2 中环路 L 所围的任意曲面 S',其对电流端点 $-q$ 和流入端 $+q$ 所张立体角分别为

$$\Omega_{S'(-q)} = 2\pi(1-\cos\theta_1)$$

$$\Omega_{S'(+q)} = 2\pi(1-\cos\theta_2)$$

则 $-q$、$+q$ 激发的电场通过面 S' 上的电位移通量

$$\Phi_{D,S'} = \Phi_{D(-q)} + \Phi_{D(+q)} = \frac{\Omega_{S(-q)}}{4\pi}(-q) + \frac{\Omega_{S(+q)}}{4\pi}(+q) = \frac{q}{2}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

穿过面 S' 的位移电流

$$I_{d,S'} = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{1}{2}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)\frac{dq}{dt} = \frac{I}{2}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

由于面 S' 没有穿过传导电流,故穿过面 S' 的全电流即为

$$\frac{I}{2}(\cos\theta_1-\cos\theta_2) \tag{10}$$

式(9)和式(10)相等,说明不论是环路 L 所围的圆平面 S 还是任意曲面 S',全电流均为 $\frac{I}{2}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$,是恒定不变的.

穿过圆平面 S 的位移电流即式(8)小于零,说明位移电流方向与传导电流相反;而穿过环路 L 的全电流为正,与传导电流方向相同.该结果的物理意义是导线上端正电荷发出的电场线经外部空间回到下端的负电荷又经导线内部到达上端形成闭合曲线,其中穿过环路 L 的部分电场线与环路正法线方向夹角为钝角,故对应的位移电流为负值,但其绝对值小于传导电流 I.

综上所述表明,在考虑位移电流之后,磁场环流 $\oint_L \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{I}{2}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$,与用毕奥-萨伐尔定律计算结果一致.由此安培环路定理在一段有限长电流磁场中是成立的.

3　结论

本文以一段有限长电流为例,从一般电磁场的物理实际出发,考虑变化磁场中的位移电流,证明了安培环路定理在任何电磁场中总是成立的.说明安培环路定理对于非闭合载流导线和有电容器的情况,计算环路包围的电流时必须以全部电流计算.推导和证明过程避免了假设和复杂的数学推导,更易于学生从物理概念和意义上接受,能够帮助学生更好地理解安培环路定理和电磁场的性质.

参考文献

[1] 赵凯华,陈熙谋.电磁学[M].4 版.北京:高等教育出版社,2018.

[2] 张三慧.大学物理学[M].4 版.北京:清华大学出版社,2019.

[3] 马文蔚,周雨青.物理学[M].7 版.北京:高等教育出版社,2021.

(下转第 12 页)

学学报(自然科学版),2006,12(4):114-116.

[3] 彭荣荣.应用技术型转型理念下民办高校大学物理实验教学模式的改革与探索[J]. 物理通报,2017, 36(11):98-100.

[4] 王璠.民办院校自制大学物理演示实验教具的研究与实践[J].客联,2021,22(10):109.

Construction and Practice on University Physics Experiment Textbooks in Private Universities by Application-oriented as the Guidance

WANG Fan PENG Rongrong

(School of Education,Nanchang Institute of Science and Technology,Nanchang,Jiangxi 330108)

Abstract:Teaching materials are the main carrier of teaching content and an important guarantee for cultivating talents. Through the investigation of the current situation of physics experimental teaching materials construction in private universities,it is found that the factors that lag behind the teaching material construction are the imperfect system,the limitation of objective conditions,the connection between theory and experimental teaching,and the lack of encouraging policies,and put forward reasonable suggestions and optimization measures for these problems. And through the multi-dimensional way to infiltrate the applied concept into the preparation of the *University Physics Experiment Course*,to promote the development and perfection of the experimental textbooks,and truly achieve the teaching materials education,practical education,ideological and political education.

Keywords:private colleges and universities;university physics experiment;teaching material construction;practice education

(上接第 8 页)

[4] 吴恒钦.安培环路定理对于一段有限长稳恒电流的磁场成立吗?[J].工科物理,1998,8(4):12-14.

[5] 胡锡奎.恒定磁场中安培环路定理的探讨[J].大学物理,2021,40(8):20-22,40.

Application of Ampere Circuital Theorem in the Magnetic Field of a Finite Length Current-carrying Wire

MIAO Qi FAN Yize TAO Mingjie REN Yuan

(Department of Basic Course,Space Engineering University,Beijing 101416)

Abstract:Ampere circuital theorem is the basic theorem in electromagnetic fields. In this paper,taking a finite length current as an example,based on view of physical fact and concepts, the misunderstanding of Ampere circuital theorem is not set up in some magnetic field is explained without assumptions and complex mathematical deduction,points out that Ampere circuital theorem is always established if the displacement current considered.

Key words:Ampere circuital theorem;displacement current;finite long current