

回归电路分析 杜绝死记二级结论

——赏析2021年上海市高三物理竞赛一道电路试题

涂 泓

(上海师范大学数理学院 上海 200234;

上海市星系和宇宙学半解析研究重点实验室 上海 200234)

(收稿日期:2021-11-30)

摘要:2021年上海市高三物理竞赛中出现一道“非传统”电路试题,打破了“当内阻等于外电路总电阻时电源输出功率最大”的固定思维,因此,学生必须回归到从电路分析入手,杜绝了解这类题时普遍存在的死记二级结论的现象.在给出此题详细解答的基础上,分析了该解答的合理性及具体的物理过程,进而对本题进行了改编和拓展.

关键词:全电路欧姆定律 电源输出功率 电路分析 极值 取值范围

高中物理开始接触全电路欧姆定律,由此产生了一类常见题目,即求电源输出功率达到极大值时,电源内阻和外电路电阻之间的关系^[1~3].电源输出功率极大值问题是高中物理中的重要考点,既能考查学生对全电路欧姆定律、电功率等知识的理解,又能考查学生利用求极值等数学方法分析解决问题的能力.

然而,在实际的教学过程中,由于这类题大多比较相似,即使变形后的计算过程和结论也比较相似,因此,多加练习的结果相当于对学生进行重复训练,以至于大多数学生并不通过计算,而是直接记住了“当内阻等于外电路总电阻时电源输出功率最大”这个结论,甚至完全忘记了这个结论是如何得到的.在这种情况下,这类必做题已经失去了其理应发挥的作用.

如何才能打破学生的这一固定思维呢?其关键在于改变这类题目千题一面的状态,设计一些学生仅靠熟记二级结论无能为力的题目.第15届上海市高三物理竞赛中的一道题目提供了一个很好的例子,其外电路是由多个相同的灯泡并联而成的,改变灯泡的个数测得相应的电源输出功率.由于外电路的总电阻不是连续变化的,因此,采用针对外电阻连续变化的数学方法所求得的电源输出功率极值,事实上不一定能达到,这样学生就必须从分析电路变化入手.下面我们对这道题做具体分析和拓展.

1 原题及解答

【原题】 N 个电阻均为 R 的灯泡并联后与电动势

为 E ,内阻为 r 的电源相连.用不同个数的灯泡实验发现,当 $N=5$ 时,这些灯泡消耗的总功率 P 最大,求内阻 r 的取值范围.

解答:首先写出 N 个灯泡并联时电源输出功率 P 的表达式,不难算出,此时电路的总电流为

$$I = \frac{E}{r + \frac{R}{N}}$$

因此,电源输出功率

$$P = I^2 \frac{R}{N} = \left(\frac{E}{r + \frac{R}{N}} \right)^2 \frac{R}{N} = \frac{NR E^2}{(Nr + R)^2} \quad (1)$$

按题意,并联5个灯泡时的输出功率 P_5 既大于并联4个灯泡时的输出功率 P_4 ,也大于并联6个灯泡时的输出功率 P_6 .因此,利用式(1)可得到以下两个不等式,对于

$$P_5 > P_4$$

即

$$\frac{5RE^2}{(5r+R)^2} > \frac{4RE^2}{(4r+R)^2}$$

解得

$$r^2 < \frac{1}{20} R^2$$

对于

$$P_5 > P_6$$

即

$$\frac{5RE^2}{(5r+R)^2} > \frac{6RE^2}{(6r+R)^2}$$

解得

$$r^2 > \frac{1}{30} R^2$$

综合以上两式,可知 r 的取值范围为

$$\frac{R}{\sqrt{30}} < r < \frac{R}{\sqrt{20}}$$

也就是说,只要电源内阻 r 在此范围内时,改变并联灯泡的个数,都会在 5 个灯泡时测得电源输出功率最大。

如果学生不做分析,而是根据题给条件“当 $N=5$ 时,这些灯泡消耗的总功率 P 最大”,直接将熟记的结论“当内阻等于外电路总电阻时电源输出功率最大”用于本题,就会得到电源内阻 $r = \frac{R}{5}$ 的结果,但这并不是正确的结果。可见,死记二级结论的学习方法遇到这道题目就失效了。

2 对取值范围的解析

正确答案只给出了电源内阻的可能取值范围,为什么不能求出其确定值呢? 我们可将通过数学方法求得的极值与这一范围作比较,由此分析其中的原理。

为了求电源输出功率的极值,将式(1)写成以下形式

$$P = \frac{RE^2}{\left(\sqrt{Nr} + \frac{R}{\sqrt{N}}\right)^2} = \frac{RE^2}{\left(\sqrt{Nr} - \frac{R}{\sqrt{N}}\right)^2 + 4rR} \quad (2)$$

显然,当式(2)的分母最小时,输出功率 P 最大,此时 $\sqrt{Nr} - \frac{R}{\sqrt{N}} = 0$, 即 $r = \frac{R}{N}$ 。这就是大家熟知的结论,即电源内阻等于外电路总电阻时,电源输出功率最大,最大功率为 $P_{\max} = \frac{E^2}{4r}$ 。若将 $N=5$ 代入,

即可得 $r = \frac{R}{5}$, 但这个貌似很合理的结果为什么是不正确的呢? 问题就出在题目所给电路中,电源内阻 r 和组成外电路的每个电阻 R 的阻值都是确定的,由式(2)求极值得到的 $r = \frac{R}{N}$ 式中的 N 未必是整数。而本题中灯泡个数 N 只能取正整数,即外电路总电阻不是连续变化的,因此,电源实际输出功率也只能是一些与 N 对应的离散数值。用数学方法求极值所得的最大输出功率不一定恰好等于并联 5 个灯泡时的电源实际输出功率 P_5 。这个最大功率可能

出现在 P_4 和 P_5 之间,也可能出现在 P_5 和 P_6 之间。

以上关系可以用图像给出更直观的说明。答案所得的电源内阻取值范围中包括 $r = \frac{R}{5}$ 这一数学方法求得的极值,因此,我们将该取值范围分成两个区间。

当电路满足 $\frac{R}{5} < r < \frac{R}{\sqrt{20}}$ 时,不妨设 $r = \frac{R}{4.5}$,

根据式(2)可作出 $P-N$ 图线如图 1(a) 所示。在测量过程中只能测得 N 为正整数时所对应的 P 值。从图中可以看出,当用不同个数的灯泡 ($N = \dots, 4, 5, 6, \dots$) 实验时,会发现 $N=5$ 所对应的电源输出功率 P 最大,既大于并联 4 个灯泡时的输出功率,也大于并联 6 个灯泡时的输出功率。实际上,此时数学极大值对应的是 $N = 4.5$ 个灯泡,在该电路中无法实现。

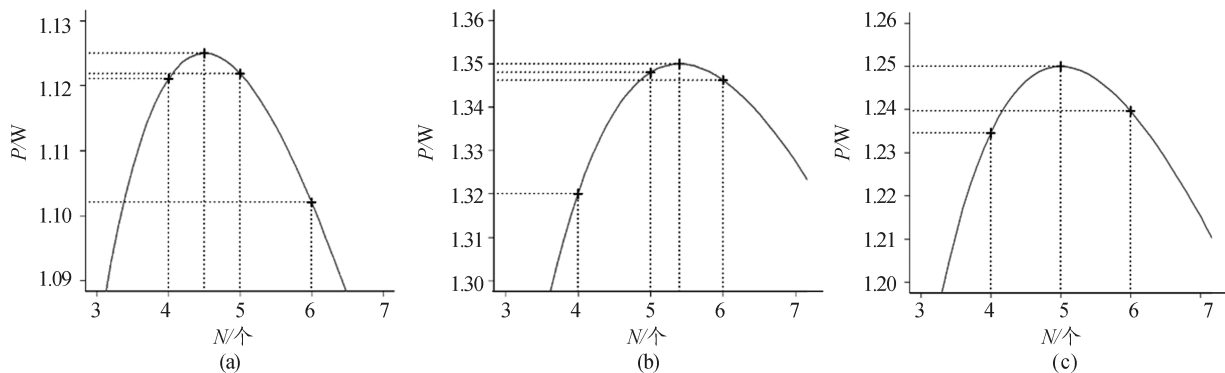
不仅如此,假如 N 可以连续变化,由图可知 $N=4$ 到 $N=5$ 之间的大部分点都大于并联 5 个灯泡时的输出功率,但这些点对应的 N 都不是正整数,因此无法测到。也就是说,实验过程中测得的并不是图 1(a) 中的连续理论线,而是对应于 $N = \dots, 4, 5, 6, \dots$ 这些离散的点。同理可知,除了 $r = \frac{R}{4.5}$ 这一特殊值以外,电源内阻在 $\frac{R}{5} < r < \frac{R}{\sqrt{20}}$ 这一区间内的

$P-N$ 图线均与图 1(a) 相似,只是峰值对应的 N 值不同,但由于在这一区间内 N 的取值范围 $\sqrt{20} < N < 5$ 没有整数,且题目要求 P_5 大于 P_4 ,即要求这一区间左边界处的 P 值小于右边界处的 P 值,因此,在此范围内都会在 $N=5$ 时测得最大值。

当电源内阻 r 在 $\frac{R}{\sqrt{30}} < r < \frac{R}{5}$ 时, $P-N$ 图线的

峰值移动到 $5 < N < \sqrt{30}$ 这一区间内。图 1(b) 是取 $r = \frac{R}{5.4}$ 这一特殊值时所得的曲线,此区间内其他 r 值对应的曲线与此相似。 N 在这一取值范围内同样没有整数,且题目要求 P_5 也大于 P_6 ,因此,在这一范围内也会在 $N=5$ 时测得最大值。

当电源内阻 $r = \frac{R}{5}$ 时, $P-N$ 图线的峰值恰好在 $N=5$ 处,如图 1(c) 所示,因此显然在 $N=5$ 时测得最大值。

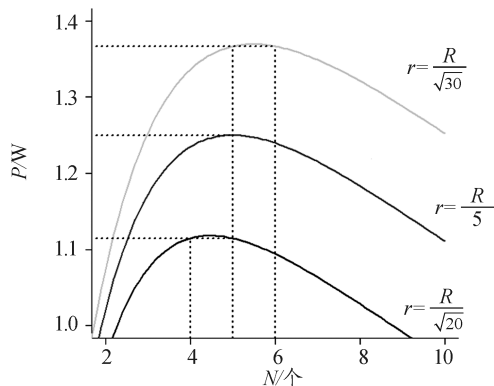
图1 $P-N$ 图

因此,根据本题所给条件“当 $N=5$ 时,这些灯泡消耗的总功率 P 最大”,并不能断定5个灯泡并联时的电源输出功率就是电路中电源输出的最大功率,能够确定的只是 $P_5 > P_4$ 和 $P_5 > P_6$. 由这两个不等式只能得出电源内阻的取值范围,而不能得出内阻的确定值.

3 内阻必须在此取值范围内的合理性

电源内阻是否必须在以上解出的范围内才能满足题目的要求呢? 我们也可以由图像来分析这一范围的合理性.

图2中给出了题目答案所给出的范围的上下限以及数学极值所对应的3条曲线,即 $r = \frac{1}{\sqrt{20}}R$, $r = \frac{1}{5}R$ 和 $r = \frac{1}{\sqrt{30}}R$ 的3种电路中,输出功率 P 与外接灯泡个数 N 的关系. 由图可以看出,随着 r 的减小,电路输出功率 P 的峰值单调右移. 根据数学计算极值得到最大功率表达式 $P_{\max} = \frac{E^2}{4r}$, 也可以得出同一结论.

图2 3种内阻对应的 $P-N$ 图

我们对这3种电路的详细分析如下.

(1) 取该范围的上限,即 $r = \frac{R}{\sqrt{20}} \approx \frac{R}{4.47}$, 此时

并联4个灯泡时的输出功率 P_4 与并联5个灯泡时的输出功率 P_5 相等,即 $P_4 = P_5$, 峰值在 P_4 与 P_5 之间.

若 $r < \frac{1}{\sqrt{20}}R$, 则图线的峰值右移,且随着 r 减小,题目要求的 $P_4 < P_5$ 这一关系一直成立. 反过来,若 $r >$

$\frac{1}{\sqrt{20}}R$, 则图线的峰值左移,且随着 r 增大,题目要求的 $P_4 < P_5$ 这一关系不再成立. 例如,图3(a)给出了

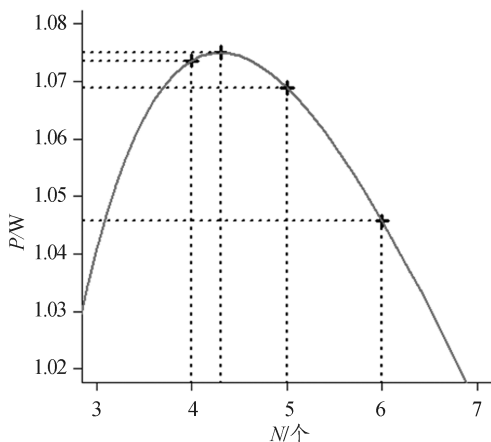
$r = \frac{R}{4.3}$ 时的 $P-N$ 图线,此时 $P_4 > P_5$, 实验过程中测得的最大值对应于 $N=4$, 而不再是 $N=5$. 因此,

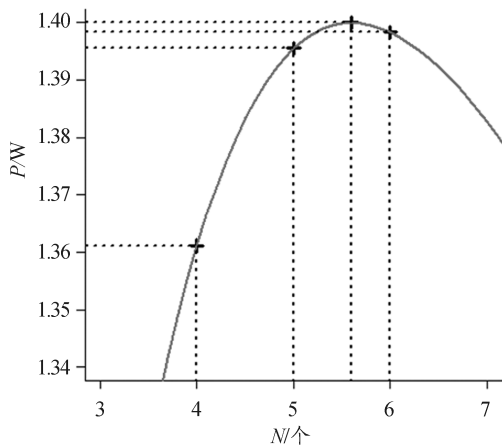
$\frac{1}{\sqrt{20}}R$ 是满足题目要求的 r 的最大值.

在这个极端处,数学上的极大值 $r = \frac{R}{N}$ 对应的

灯泡个数是 $N = \frac{R}{r} = \sqrt{20}$, 这不是一个整数,实际不

可能实现.

(a) $r = \frac{R}{4.3}$ 对应的 $P-N$ 图

(b) $r = \frac{R}{5.6}$ 对应的 $P-N$ 图图3 不同 r 对应的 $P-N$ 图

(2) 取该范围的下限, 即 $r = \frac{1}{\sqrt{30}}R$, 此时并联 5

个灯泡时的输出功率 P_5 与并联 6 个灯泡时的输出功率 P_6 相等, 即 $P_5 = P_6$, 峰值在 P_5 与 P_6 之间.

若 $r > \frac{1}{\sqrt{30}}R$, 则图线的峰值左移, 且随着 r 增大, 题目要求的 $P_6 < P_5$ 这一关系一直成立. 反过来,

若 $r < \frac{1}{\sqrt{30}}R$, 则图线的峰值右移, 且随着 r 增大, 题目要求的 $P_6 < P_5$ 这一关系不再成立. 例如, 图 3(b)

给出了 $r = \frac{R}{5.6}$ 时的 $P-N$ 图线, 此时 $P_6 > P_5$, 实验过程中测得的最大值对应于 $N=6$, 而不再是 $N=5$.

因此, $\frac{1}{\sqrt{30}}R$ 是满足题目要求的 r 的最小值.

在这个极端处, 数学上的极大值 $r = \frac{R}{N}$ 对应的灯泡个数是 $N = \frac{R}{r} = \sqrt{30}$, 同样也不可能实现.

(3) 并联 5 个灯泡时的输出功率 P_5 等于数学极大值时, $r = \frac{1}{\sqrt{25}}R = \frac{R}{5}$, 峰值恰在 P_5 处, 这才是数学上解得的极值.

由此可见, 只有当电源内阻在题目解答得出的范围内时, 题给条件才能得到满足, 而只有在内阻 r 为该范围内的一个特定值时, 电源的实际输出功率才对应数学上解得的极值.

4 题目改编及拓展

根据以上分析可以看出, 这道竞赛题的主要特点在于, 改变了此类题目中常见的外电路电阻连续

变化的情况, 通过改变灯泡个数的方式来改变外电路总电阻, 从而将电源输出功率随外电路电阻的变化变成了离散函数, 导致通过数学方式计算所得的理论极值在实际电路中不一定能实现. 在这种情况下, 学生死记二级结论就无效了, 从而得以考查学生是否真正理解了题意并作出了合理的分析.

此题作为竞赛题, 要求学生求内阻范围, 具有一定的思维量, 在常规教学中, 可对此题稍作改编, 求出电源内阻的确定值, 然后进一步拓展, 搭建阶梯, 让学生逐步深化理解. 由第一部分的题目解析可知, 由两个不等式只能得出电源内阻的取值范围, 而不能得出内阻的确定值. 可以想见, 只要有这些功率之间的一个等式(而非不等式), 就不难得到电源内阻的确定值了. 下文的拓展题将给出一个求电源内阻确定值的例子.

【改编题】 N 个电阻均为 R 的灯泡并联后与电动势为 E , 内阻为 r 的电源相连. 用不同个数的灯泡实验发现, 当 $N=4$ 和 $N=6$ 时, 电源输出功率相同, 求电源内阻 r .

此题解答的前半部分与原题相同, 因此利用原题所求得的功率表达式(1)可得

$$P_4 = P_6$$

即

$$\frac{4RE^2}{(4r+R)^2} = \frac{6RE^2}{(6r+R)^2}$$

解得

$$r = \frac{1}{\sqrt{24}}R$$

这一改编题比原题难度大大降低, 学生经思考后较容易得出正确答案, 但同样杜绝了学生靠死记“当内阻等于外电路总电阻时电源输出功率最大”这个二级结论直接得到答案.

【题目拓展】在学生得到了正确答案的基础上, 可做以下两步拓展:

(1) 引导学生思考改变外电路并联灯泡的个数时, 电源输出功率的变化规律, 使学生对电源输出功率 P 随并联灯泡个数 N 的变化产生定性的认识, 知道在并联 5 个灯泡时, 电源输出功率会测得最大值.

(2) 随后再进一步引导学生思考该电路是否能达到数学极大值. 学生通过计算可知, 该电路达到数学极大值时对应的灯泡个数是 $N = \frac{R}{r} = \sqrt{24}$ 个, 因

(下转第 104 页)

评析:函数法将物理问题转化为数学问题进行求解,对学生数学水平有一定要求,且有利于培养学生数学与物理相结合的思想.

4.4 相对运动法

相对运动法是利用相对运动的知识求解追及相遇问题,通过选择合适的参考系,简化物理情境,最终解决问题.在运用此方法时应注意将两物体相对地面的物理量(位移、速度和加速度)转化为相对的物理量.此题运用相对运动法解答如下.

解:设 a 最小值为 a_0 ,此时甲、乙两车恰好不相撞.以乙车为参考系,则甲车的初速度为 $v_0 = 10 \text{ m/s}$,以加速大小 a_0 减速,行驶 $s_0 = 100 \text{ m}$ 后“停下”,末速度为 $v_t = 0$.根据匀变速直线运动位移时间公式有

$$v_t^2 - v_0^2 = -2a_0s_0$$

代入数据解得

$$a_0 = 0.5 \text{ m/s}^2$$

则

(上接第 101 页)

此,在该电路中不能实现.而并联 5 个灯泡时测得的只是不同个数的灯泡所对应的离散的功率值中的最大值.再细究其原因,就会发现这是因为 P 与 N 的函数关系 $P = \frac{NRE^2}{(Nr + R)^2}$ 所对应的曲线不是对称的(图 4).

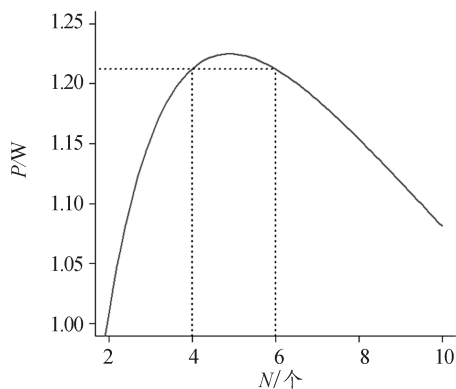


图 4 电源输出功率与灯泡个数的关系曲线

物理教学和学习中,有一些重要的知识点被反复练习,其初衷是为了学生更牢固地掌握这些内容,但由于习题相似度较高,导致学生有意无意地只记

$$a \geq 0.5 \text{ m/s}^2$$

评析:相对运动法过程简单,运算量小,但对学生知识水平要求较高,需在扎实并熟练掌握匀变速直线运动规律的基础上运用,适用于学有余力的学生,不做全体要求.

综上所述,掌握“一个概念先牢记、两类图像画仔细、三条关系来分析、四大方法去解题”的解题步骤与思路,方能以不变应万变,彻底破解追及和相遇问题.

参考文献

- 1 成金德.追及和相遇问题探析[J].教学考试,2021(31):16~20
- 2 潘科选.谈“追及相遇问题”的解题技巧[J].数理化解题研究,2019(7):85~86
- 3 袁开志.追及和相遇问题探究[J].中学生数理化(学习研究),2018(9):58
- 4 刘宗涛.直线运动中追及相遇问题四法评析——用“一题多解”构建“共享式”物理课堂示例[J].物理通报,2018(8):59~61

住了结论而不再关注其中的物理原理.而在大多数情况下,这种死记结论的做法不仅有效,甚至能够极大地提高解题速度,这就使得情况更加恶化,学生一遇到这类题目就形成了条件反射,直接给出解答,久而久之完全忘记了求解的过程.因此,反复操练的结果使学生的思维固化,不仅没有起到巩固知识的作用,甚至还起到了使学生不思究竟的反作用.

由此可见,形成这一不良局面的原因,与题目类型死板、解答过程固化不无关系.因此,增加题目的灵活性和多样性可成为打破这一僵局的一个关键点.电源输出功率极大值问题历来是学生死记二级结论的一个重灾区,本文所呈现的题目及其拓展在这方面给出了一次尝试,使得靠死记硬背的结论不再适用,从而回归到问题的物理本源.

参考文献

- 1 梁灿彬.电磁学[M].北京:高等教育出版社,2012
- 2 赵凯华,陈熙谋.新概念物理教程 电磁学[M].北京:高等教育出版社,2018
- 3 王琦.电源输出功率随变阻器阻值变化规律分析[J].物理教师,2017(4):85~87