

运用等效观深化绳-船模型

何述平 卢嘉鹏 张雯婷

(西北师范大学教育学院 甘肃 兰州 730070)

(收稿日期:2022-02-22)

摘要:绳-船模型的相关解答仅注重船速求解,未探讨不同运动分解形式是否等效,难免遗留不少理解的缺憾.运用等效观研究了船的不同运动分解形式之间的等效问题,结果表明,3种基本分运动不仅与合运动相互等效,而且彼此等效,解释了学生理解绳-船模型的疑惑,提出了相应的教学建议.

关键词:绳-船模型 等效观 速度合成法 矢量 教学建议

1 引言

绳-船模型是典型的运动分解与合成问题:如图1所示,岸上某人用绕过定滑轮的不可伸长的细绳以匀速 v_0 拉湖面上连接绳的小船靠岸;当绳与水平面成 θ 角时,求小船速度大小.相关解答仅围绕船速求解,运用位移微元法(对应位移矢量图)或速度合成法(对应速度矢量图,见图2~4),均可求得船速大小 $v = \frac{v_0}{\cos \theta}$ ^[1~4],位移微元法是速度合成法的基础^[4].然而,船的不同运动分解形式是否等效?若等效,可否运用等效观念有效解决学生理解的困惑?就此进行相应探究,以期运用等效观推证船的不同运动分解形式之间的等效,解释学生理解绳-船模型的疑惑,深化运动分解与合成的认识,奠定指向物理核心素养的提高型教学设计的物理基础.

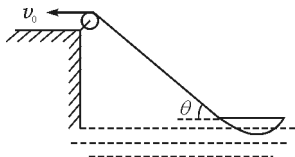


图1 绳-船模型

2 运动分解形式的推证

船的运动为合运动,绳、船连动,连接船的绳端与船的运动物理量(位移、速度)相同,绳端A(或船)为研究对象,运用速度合成法^[4]可推证绳端A(或船)运动的3种不同分解形式.

2.1 运动分解形式1

绳端A(或船)运动为沿绳向上分运动 v_1 和垂直绳向下分运动 v_2 的合运动,如图2的运动分解形式1.依据图2和题意(绳缩短速度 v_0),有

$$v_1 = v_0 \quad (1)$$

$$v_2 = v_1 \tan \theta \quad (2)$$

$$v = \frac{v_1}{\cos \theta} \quad (3)$$

由式(1)~(3),得

$$v_2 = v_0 \tan \theta \quad (4)$$

$$v = \frac{v_0}{\cos \theta} \quad (5)$$

式(1)、(4)、(5)分别是绳端A(或船)的分速度 v_1 (方向沿绳向上)、分速度 v_2 (方向垂直绳向下)、合速度 v (方向水平向左)大小的表达式^[1~4].

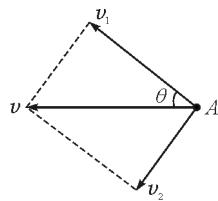


图2 运动分解形式1图示

由图2和式(1)、(4)、(5)检验有 $v_1^2 + v_2^2 = v^2$;若将图2的 v_1 和 v_2 沿水平向左方向和竖直向下方向分解,则有

$$v_{1x} = v_0 \cos \theta \quad (6)$$

$$v_{1y} = -v_0 \sin \theta \quad (7)$$

$$v_{2x} = v_0 \sin \theta \tan \theta \quad (8)$$

$$v_{2y} = v_0 \sin \theta \quad (9)$$

再沿水平方向和竖直方向合成,可得

$$v_x = v_{1x} + v_{2x} = \frac{v_0}{\cos \theta} \quad (10)$$

$$v_y = v_{1y} + v_{2y} = 0 \quad (11)$$

式(10)、(11)表明:合运动 v_x 沿水平向左方向, 竖直方向的两分运动 v_{1y} 和 v_{2y} 彼此抵消. 学生可深入理解绳端 A(或船)的分运动与合运动的关系:分运动 v_1 和 v_2 与合运动 v 相互等效.

2.2 运动分解形式 2

绳端 A(或船)运动为沿绳向上分运动 v_3 和竖直向下分运动 v_4 的合运动,如图 3 的运动分解形式 2. 依据图 3 和题意(绳缩短速度 v_0),有

$$v_3 - v_4 \sin \theta = v_0 \quad (12)$$

$$v_4 = v_3 \sin \theta \quad (13)$$

$$v = v_3 \cos \theta \quad (14)$$

由式(12)~(14),得

$$v_3 = \frac{v_0}{\cos^2 \theta} \quad (15)$$

$$v_4 = \frac{v_0 \sin \theta}{\cos^2 \theta} \quad (16)$$

及 v 的表达式同式(5). 式(15)、(16)、(5) 分别是绳端 A(或船)的分速度 v_3 (方向沿绳向上)、分速度 v_4 (方向竖直向下)、合速度 v (方向水平向左) 大小的表达式^[1,3].

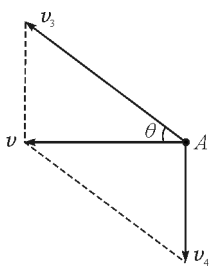


图 3 运动分解形式 2 图示

由图 3 和式(15)、(16)、(5) 检验有 $v_3^2 - v_4^2 = v^2$; 若将图 3 的 v_3 沿水平向左方向和竖直向上方向分解,则有

$$v_{3x} = \frac{v_0}{\cos \theta} \quad (17)$$

$$v_{3y} = \frac{v_0 \sin \theta}{\cos^2 \theta} \quad (18)$$

再沿水平方向和竖直方向合成,可得:合运动 v_{3x} 沿水平向左方向, 竖直方向的两分运动 v_{3y} 和 v_4 彼此

抵消. 不仅学生可深入理解绳端 A(或船)的分运动与合运动的关系:分运动 v_3 和 v_4 与合运动 v 相互等效;而且学生可能的疑惑“船具有竖直向下的分速度 v_4 , 船为什么没有向下运动而潜入水中?”自然而然解除.

2.3 运动分解形式 3

绳端 A(或船)运动为竖直向上分运动 v_5 和垂直绳向下分运动 v_6 的合运动,如图 4 的运动分解形式 3. 依据图 4 和题意(绳缩短速度 v_0),有

$$v_5 \sin \theta = v_0 \quad (19)$$

$$v_5 = v_6 \cos \theta \quad (20)$$

$$v = v_6 \sin \theta \quad (21)$$

由式(19)~(21),得

$$v_5 = \frac{v_0}{\sin \theta} \quad (22)$$

$$v_6 = \frac{v_0}{\sin \theta \cos \theta} \quad (23)$$

及 v 的表达式同式(5). 式(22)、(23)、(5) 分别是绳端 A(或船)的分速度 v_5 (方向竖直向上)、分速度 v_6 (方向垂直绳向下)、合速度 v (方向水平向左) 大小的表达式.

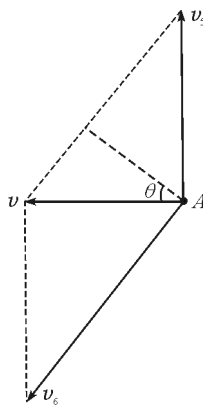


图 4 运动分解形式 3 图示

由图 4 和式(22)、(23)、(5) 检验有 $v_6^2 - v_5^2 = v^2$; 若将图 4 的 v_6 沿水平向左方向和竖直向下方向分解,则有

$$v_{6x} = \frac{v_0}{\cos \theta} \quad (24)$$

$$v_{6y} = \frac{v_0}{\sin \theta} \quad (25)$$

再沿水平方向和竖直方向合成,可得:合运动 v_{6x} 沿水平向左方向, 竖直方向的两分运动 v_5 和 v_{6y} 彼此抵消. 不仅学生可深入理解绳端 A(或船)的分运动

与合运动的关系:分运动 v_5 和 v_6 与合运动 v 相互等效;而且学生可能的疑惑“船具有竖直向上的分速度 v_5 ,船为什么没有向上运动而脱离水面?”自然而然解除.

上述分解形式的推证过程表明这3种运动分解形式不同(分速度大小、方向不同),简捷程度为:形式1最简,形式2次之,形式3最繁.

3 分运动形式的等效

绳端A(或船)运动可分解为上述3种形式分运动,并已验证分运动与合运动相互等效;那么,不同形式分运动之间是否彼此等效?

3.1 分运动形式1与2等效

将图3的分速度 v_4 沿绳向上方向和垂直绳向下方向即按图2的 v_1 和 v_2 方向分解,则有

$$v_1 = v_3 - v_4 \sin \theta \quad (26)$$

$$v_2 = v_4 \cos \theta \quad (27)$$

再由式(15)、(16)可得式(1)、(4),表明:图3分运动形式2与图2分运动形式1等效.

将图2的分速度 v_2 沿水平向左方向和竖直向下方向分解,有式(8)、(9);竖直方向添加增量

$$\Delta v_y = v_0 \sin \theta \tan^2 \theta \quad (28)$$

由式(9)、(28),并参考图3,得

$$v_{2y} + \Delta v_y = \frac{v_0 \sin \theta}{\cos^2 \theta} = v_4 \quad (29)$$

v_{2x} 与竖直向上 Δv_y 合成,由式(8)、(28)得

$$\Delta v_3 = v_0 \tan^2 \theta \quad (30)$$

方向与水平向左方向的夹角为 θ ,即沿绳向上方向;再由图2和式(1)、(30),得

$$v_1 + \Delta v_3 = \frac{v_0}{\cos^2 \theta} = v_3 \quad (31)$$

式(29)、(31)表明:图2分运动形式1与图3分运动形式2等效.

3.2 分运动形式1与3等效

将图4的分速度 v_5 沿绳向上方向和垂直绳向下方向即按图2的 v_1 和 v_2 方向分解,则有

$$v_1 = v_5 \sin \theta \quad (32)$$

$$v_2 = v_6 - v_5 \cos \theta \quad (33)$$

再由式(22)、(23)可得式(1)、(4),表明:图4分运动形式3与图2分运动形式1等效.

将图2的 v_1 沿水平向左方向和竖直向上方向分

解,有式(6)、(7)(去掉右侧的“-”号);竖直方向添加增量

$$\Delta v_y = v_0 \cos \theta \cot \theta \quad (34)$$

由式(7)、(34),并参考图4,得

$$v_{1y} + \Delta v_y = \frac{v_0}{\sin \theta} = v_5 \quad (35)$$

v_{1x} 与竖直向下 Δv_y 合成,由式(6)、(34)得

$$\Delta v_6 = v_0 \cot \theta \quad (36)$$

方向与竖直向下方向的夹角为 θ ,即沿垂直绳向下方向;再由图4和式(4)、(36),得

$$v_2 + \Delta v_6 = \frac{v_0}{\sin \theta \cos \theta} = v_6 \quad (37)$$

式(35)、(37)表明:图2分运动形式1与图4分运动形式3等效.

3.3 分运动形式2与3等效

将图3的 v_3 沿水平向左方向和竖直向上方向分解,有式(17)、(18); v_{3y} 与 v_4 彼此抵消,竖直方向添加增量

$$\Delta v_y = \frac{v_0}{\sin \theta} \quad (38)$$

竖直向上方向,有

$$\Delta v_y = \frac{v_0}{\sin \theta} = v_5 \quad (39)$$

竖直向下方向,有

$$\Delta v_y = \frac{v_0}{\sin \theta} = v_{6y} \quad (40)$$

v_{3x} 与 v_{6y} 合成,由图4和式(17)、(40)得

$$\frac{v_0}{\sin \theta \cos \theta} = v_6 \quad (41)$$

方向与竖直向下方向的夹角为 θ ,即沿垂直绳向下方向.式(39)、(41)表明:图3分运动形式2与图4分运动形式3等效.

将图4的 v_6 沿水平向左方向和竖直向下方向分解,有式(24)、(25); v_{6y} 与 v_5 彼此抵消,竖直方向添加增量

$$\Delta v_y = \frac{v_0 \sin \theta}{\cos^2 \theta} \quad (42)$$

竖直向下方向,有

$$\Delta v_y = \frac{v_0 \sin \theta}{\cos^2 \theta} = v_4 \quad (43)$$

竖直向上方向,有

$$\Delta v_y = \frac{v_0 \sin \theta}{\cos^2 \theta} = v_{3y} \quad (44)$$

v_{6x} 与 v_{3y} 合成,由图 3 和式(24)、(44)得

$$\frac{v_0}{\cos^2\theta} = v_3 \quad (45)$$

方向与水平向左方向的夹角为 θ ,即沿绳向上方向,式(43)、(45)表明:图 4 分运动形式 3 与图 3 分运动形式 2 等效。

上述推证结果表明:绳端 A(或船)的分运动形式 1,2,3 之间彼此等效;推证过程表明:3 种分运动形式的简捷程度是:形式 1 最简,形式 2 次之,形式 3 最繁.至此,不仅 3 种形式分运动是否彼此等效的学生可能疑惑自然而然解除,而且学生清晰认识到图 2 分运动形式 1 最简捷。

4 运动分解与合成的讨论

绳-船模型的绳端 A(或船)运动分解形式 1,2,3 提供了深入理解运动分解与合成的实例,不仅可清晰认识到一个具体运动(速度矢量)可以分解为不同形式的分运动(分速度矢量),各形式分运动(分速度矢量)既与合运动(速度矢量)相互等效,又彼此等效;而且可顺势推广到任何矢量可以分解为不同形式的分矢量,各形式分矢量既与合矢量相互等效,又彼此等效.鉴于此,或许从矢量分解的任意性(即矢量可以任意分解)和等效性(即各分矢量与合矢量等效,各分矢量之间等效)更益于理解运动分解的多样性。

尽管矢量分解遵从平行四边形定则,但分解方法有正交法(如图 2 分解形式 1)和非正交法(如图 3,4 分解形式 2,3);由上述运动分解形式的推证和等效知:图 2 分解形式 1 最简捷.鉴于此,或许从矢量分解的方法性更益于理解运动分解的简捷性,即运动分解更适宜运用正交法.这就为处理运动(或矢量)分解与合成问题,提供了思维方法的导引。

5 教学建议

基于上述探究,绳-船模型的提高型教学要点为:

(1) 若采用“先学后教”模式,学生可能直接采取如下做法。

1) 由图 1 沿水平和竖直方向分解绳缩短速度 v_0 ,从而得船速 $v = v_0 \cos \theta$ 的错解^[2,3];则应先确认船的运动是合运动(方向水平向左),绳、船连动,连

接船的绳端的运动物理量(位移、速度)与船的相同,绳端运动为沿绳向上分运动和垂直绳向下分运动的合运动(错解是凭感觉认为:绳端沿绳向上运动,则船的运动与绳端的水平分运动相同),如图 2(严谨推证需依据位移矢量图和运用位移微元法^[4]),再由图 2 依据速度分解与合成求得船速,并检验分运动与合运动等效;

2) 由图 3 运动分解形式 2 沿水平和竖直方向分解沿绳速度 v_3 ,并认为 $v_3 = v_0$,从而得船速 $v = v_0 \cos \theta$ 的错解^[3];则应先确认船的运动是合运动(方向水平向左),图 3 与图 2 比较可知 $v_3 > v_0$,再由图 3 依据速度分解与合成求得船速(沿水平向左和竖直向上分解 v_3),并检验分运动与合运动等效;

3) 由图 4 运动分解形式 3 沿水平向左方向分解 v_6 ,并求得 $v_6 = v_0 \cot \theta$,从而得船速 $v = v_0 \cos \theta$ 的错解;则应先确认船的运动是合运动(方向水平向左),再由图 4 依据速度分解与合成求得船速(沿水平向左和竖直向下分解 v_6),并检验分运动与合运动等效。

(2) 若采用“探究-交流”模式,则做法如下。

1) 全班分成 3 组,每组推证 1 种运动分解形式,验证分运动与合运动等效,小组代表上台向全班交流、分享:绳端 A(或船)运动可以分解为 3 种不同形式,各形式分运动与合运动相互等效;

2) 每组论证 2 种形式分运动等效,小组代表上台向全班交流、分享:3 种形式分运动彼此等效;

3) 每组比较 3 种运动分解形式特点,小组代表上台向全班交流、分享:图 2 分解形式 1 最简捷,分解方法为正交法。

6 结束语

运用速度合成法推证了绳-船模型的绳端(或船)运动的 3 种分解形式,运用等效观念论证了 3 种形式分运动不仅与合运动相互等效,而且彼此等效,解决了学生理解绳-船模型的可能疑惑;讨论了 3 种运动分解形式的简捷程度,提出了绳-船模型的提高型教学建议.既深化了物理知识(速度概念、运动分解与合成规律),又深化了物理观念(等效观念)、物理方法[速度(或矢量)正交分解法,非正交分解法]。

若引领学生完成上述推证,则学生不仅看到而

且做到图 2,3,4 的分运动彼此等效,体现了“理解”知识、“经历”过程、“培养”方法的教学目标;因此,运用等效观念深化绳-船模型,既可作为提升物理观念、方法及科学思维之科学推理、科学论证的实例,又可作为指向物理核心素养的提高型教学设计实例.

参考文献

1 方银良. 为何绳端速度如此分解[J]. 物理教师,2010,

31(2):14

2 马皓. 再论“为何绳端速度如此分解”[J]. 物理通报, 2012(1):109 ~ 110

3 刘桂枝. 顺学而导 补全原解——基于学生“最近发展区”的“拉船模型”纠错策略[J]. 物理教师,2013, 34(12):25 ~ 26

4 何述平. 绳-船模型的教学研究[J]. 物理通报,2016(3): 29 ~ 33

Deepening the Rope – Boat Model Using Equivalent View

He Shuping Lu Jiapeng Zhang Wenting

(College of Education, Northwest Normal University, Lanzhou, Gansu 730070)

Abstract: The relevant solutions of the rope – boat model only pay attention to the solution of boat velocity, and do not discuss whether the different forms of motion decomposition are equivalent, which inevitably leaves many defects of understanding. The equivalence problem between the different forms of motion decomposition of the boat is studied by applying equivalent view, and the results show that the three basic partial motions are equivalent not only to the combined motion, but also to each other. The students' doubts in understanding the rope – boat model are explained, and the corresponding teaching suggestions are put forward.

Key words: rope – boat model; equivalent view; velocity synthesis method; vector; teaching suggestion

(上接第 63 页)

学流程图(图 1)中的教学顺序,以期达到最好的教学效果.

中学物理教师在教学过程中要做到不拘泥于教材,且能创造性地应用教材.教材仅是教学的辅助材料,若仅依靠教材开展教学,将很难达到预期教学效果.因此,为了达到最好的教学效果,教师在备课时,要注意理清教学逻辑,顺应学生的认知发展.

(3) 两种教学过程的对比分析——承前启后,联系知识

教材在“库仑定律”这一节中并没有很好地“承上”和“启下”,因此新旧知识之间的联系并不明显.教学中若想做好这方面的工作,充分显现新旧知识间的联系,教师可以在备课时设置一个课前小问题,保证教师在新授课前,将上一节内容融合进来,达到复习和联系新旧知识的目的.此外,教师可以在备课时设置课后作业,引导学生在新授课后思考下一节的知识及新旧知识间的联系,达到预习和联

系新旧知识的目的.

例如,图 1 所示的库仑定律教学流程图中,笔者就采取了这种方法,在新授课后,引导学生在课下思考,“电荷之间相互作用是否需要介质?”从而达到启下的目的.

中学物理教师在教学过程中首先要有承前启后的意识,然后采取适当的办法将新旧知识联系起来,从而提高中学物理课堂的教学质量和效率.

参考文献

1 邢红军,石尧,李静.“平抛运动”教学的高端备课[J]. 物理教师,2014,35(6):19 ~ 20

2 郑珊,邢红军,陆星琳.关于“变阻器”教学的高端备课[J]. 物理教师,2014,35(1):38 ~ 39

3 许冉冉,邢红军.电动势教学的高端备课[J]. 物理教师, 2016,37(5):6 ~ 8

4 王慧,宁成,邢红军.“电势差”教学的高端备课[J]. 物理教师,2013,34(7):26 ~ 30

5 刘欣,陈清梅,邢红军.超重与失重的高端备课[J]. 物理教师,2013,34(12):30 ~ 31