

抛物线型旋转轨道上珠子的运动问题

曹煜轩 姜建刚

(西北农林科技大学理学院 陕西 咸阳 712100)

(收稿日期:2022-04-21)

摘要:从拉格朗日方程出发,推导出了抛物线型旋转轨道上的珠子满足的运动方程,并讨论了珠子的平衡点,接着运用微分方程的稳定性理论,分析了平衡点的稳定性,最后利用数值模拟,得到了珠子运动的轨迹并验证了分析的结论.

关键词:抛物线型旋转轨道 微分方程 稳定性理论 数值模拟

旋转圆环上的珠子是一道有趣的力学问题.描述了一个珠子在圆形绕轴旋转的轨道内运动的问题.因其具有丰富的动力学性质,已有很多学者对这一问题展开过研究^[1~3].然而,本文通过理论分析发现,抛物线型轨道上的珠子这一问题仍具有十分有趣动力学性质.同时,本文通过数值模拟^[4~6],更加直观地阐明了珠子的运动现象.理清这一问题背后的原理,十分有助于学生对动力学与微分方程的融会贯通.

1 珠子的动力学方程

一个质量为 m 的珠子,放置在抛物线型的光滑轨道中,轨道绕 y 轴以角速度 ω 旋转,如图 1 所示.

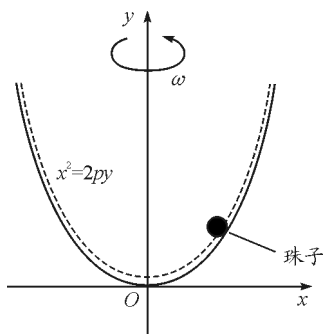


图1 抛物线上的珠子示意图

珠子的位置可由坐标 (x, y) 确定.因为珠子在抛物线轨道中运动,存在约束 $x^2 = 2py$ ($p > 0$),其中 p 为抛物线轨道的焦距,所以珠子的位置只需

一个广义坐标就可确定,选取 x 作为描述珠子运动的广义坐标.

珠子的动能可以表示为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{1}{p^2}x^2\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (1)$$

选取轨道底部作为零势能面,珠子的势能为

$$V = mgy = \frac{1}{2p}mgx^2 \quad (2)$$

则可以给出珠子的拉格朗日量

$$L = \frac{1}{2}m\left[\left(1 + \frac{1}{p^2}x^2\right)\dot{x}^2 + \left(\omega^2 - \frac{1}{p}g\right)x^2\right] \quad (3)$$

将式(3)代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

可得珠子的运动方程

$$\ddot{x} = \frac{\left(\omega^2 - \frac{g}{p}\right)p^2 x - x\dot{x}^2}{p^2 + x^2} \quad (4)$$

为了方便在相平面上讨论稳定性,我们令

$$X = x$$

$$Y = \dot{x}$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{p}}$$

并将 ω_c 称为旋转轨道的临界角速度,则式(4)可表示为

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = \frac{(\omega^2 - \omega_c^2)p^2 X - XY^2}{p^2 + X^2} \end{cases} \quad (5)$$

2 稳定性分析

2.1 平衡点分析

观察式(5),系统的平衡点可分为两种情况:

(1) 当 $\omega \neq \omega_c$ 时,平衡点为 $(X, Y) = (0, 0)$,即珠子静止在轨道的最底部.

(2) 当 $\omega = \omega_c$ 时,珠子平衡只需要 $Y=0$,而 X 可取任意值,即只要珠子速度为零,轨道上的任何地方都可以平衡.

下面将分别讨论这两种情况的稳定性.

2.2 当 $\omega \neq \omega_c$ 时

在平衡点 $(0, 0)$ 处,式(5)的线性化方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (6)$$

其中

$$\alpha = \omega^2 - \omega_c^2$$

式(6)的向量形式可以表示为 $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$. 系统的稳定由系数矩阵 \mathbf{A} 的特征根决定. 矩阵 \mathbf{A} 的特征根为

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\alpha}$$

当 $\omega > \omega_c$ 即 $\alpha > 0$ 时,此时为两个异号的实根,根据微分方程的定性理论^[7],平衡点 $(0, 0)$ 为鞍点,是不稳定的. 而当 $\omega < \omega_c$ 时即 $\alpha < 0$,特征根是实部为零的两个共轭复根

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{-\alpha}$$

此时平衡点 $(0, 0)$ 称为中心^[7],是稳定的但非渐近稳定.

2.3 当 $\omega = \omega_c$ 时

珠子可在任意位置平衡,设平衡点为

$$X = X^*$$

做平移变换

$$X = Z + X^*$$

将 XOY 平面上的平衡点 $(X^*, 0)$ 平移到了 ZOY 平

面的原点,式(5)变为

$$\begin{cases} \dot{Z} = Y \\ \dot{Y} = -\frac{(Z + X^*)Y^2}{p^2 + (Z + X^*)^2} \end{cases} \quad (7)$$

因为式(7)线性化后的系数矩阵 $\|\mathbf{A}\| = 0$,表明原点为高阶奇点,所以不能通过 \mathbf{A} 的特征根去判断原点的稳定性. 我们通过探究其相平面上的轨线方程,分析其稳定性. 将式(7)消去时间 t 可得相平面上的曲线满足的微分方程

$$\frac{dY}{dZ} = \frac{-(Z + X^*)Y}{p^2 + (Z + X^*)^2} \quad (8)$$

式(8)的通解为

$$Y = \frac{Y_0}{\sqrt{(Z + X^*)^2 + p^2}} \quad (9)$$

对于初值 Y_0 在零附近的曲线,式(9)的图像如图2所示. 可以看出,所有的解都有 $Y \rightarrow 0$ 和 $Z \rightarrow \infty$ 的趋势. 处在平衡位置的珠子,若被施加一个小的初速度,那么珠子的位置就会从零开始沿着轨道逐渐增大,表明 ZOY 平面上原点是不稳定的,即在 XOY 平面上,平衡点 $(X^*, 0)$ 是不稳定的.

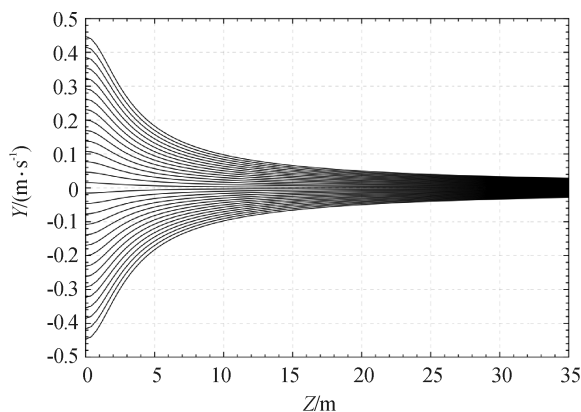


图2 $\omega = \omega_c$ 时,系统的相图

上述分析可总结为:当 $\omega \geq \omega_c$ 时,平衡点是不稳定的,而当 $\omega < \omega_c$ 时,平衡点是稳定的,但非渐近稳定.

3 数值模拟

本节通过数值模拟,探究处在平衡点的珠子若被施加一个小的扰动,即一个小的初速度,珠子的运

动轨迹会如何变化.

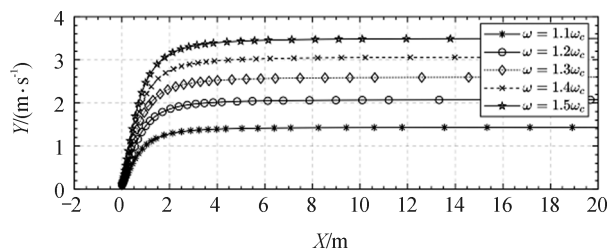
3.1 当 $\omega > \omega_c$ 时

数值模拟的参数如表 1 所示.

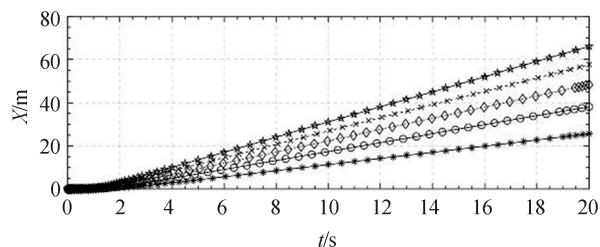
表 1 $\omega > \omega_c$ 时数值模拟中的参数

参数名称	数值
抛物线轨道焦距距 p	1
重力加速度 $g/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$	9.8
初始位置 X_0/m	0
初始速度 $\dot{Y}_0/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	0.1
旋转轨道角速度 ω	$1.1\omega_c \sim 1.5\omega_c$

模拟结果如图 3 所示.



(a) 相平面的模拟结果



(b) 珠子位置 X 和时间 t 的关系

图 3 $\omega > \omega_c$ 时, 珠子运动的数值模拟结果

图 3(a) 从相平面描述了珠子的运动情况, 可以看出, 当 $\omega > \omega_c$ 时, 对于初位移为零, 初速度为 0.1 m/s 的珠子, 起初速度增大得很快, 然后逐渐趋于一个恒定的速度, 并且在这个过程中 X 持续增大. 图 3(b) 反映了珠子位置 X 和时间 t 的关系, 同样可以看出珠子位置从零开始随着时间逐渐增大. 模拟结果表明, 当 $\omega > \omega_c$ 时, 处在平衡位置珠子若受到一个小的扰动, 则会沿着轨道向外运动, 表明平衡点是不稳定的. 这与我们在 2.2 节中分析的结果一致.

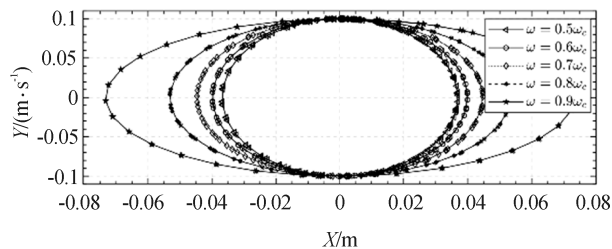
3.2 当 $\omega < \omega_c$ 时

参数如表 2 所示.

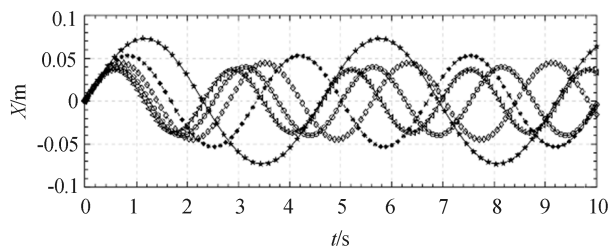
表 2 $\omega < \omega_c$ 时数值模拟中的参数

参数名称	数值
抛物线轨道焦距距 p	1
重力加速度 $g/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$	9.8
初始位置 X_0/m	0
初始速度 $\dot{Y}_0/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	0.1
旋转轨道角速度 ω	$0.5\omega_c \sim 0.9\omega_c$

模拟结果如图 4 所示.



(a) 相平面的模拟结果



(b) 珠子位置 X 和时间 t 的关系

图 4 $\omega < \omega_c$ 时, 珠子运动的数值模拟结果

图 4(a) 可以看出, 当 $\omega < \omega_c$ 时, 对于初位移为零, 初速度为 0.1 m/s 的珠子, 其相平面的轨迹为椭圆, 表明珠子始终在平衡点附近做往复运动. 图 4(b) 中描述了珠子位置 X 和时间 t 的关系, 从中也可看到珠子在做往复运动, 并且旋转轨道的角速度 ω 越大, 珠子往复运动的振幅越大. 模拟结果可以说明, 处在平衡点的珠子若被施加一个小的扰动, 珠子仍在平衡点附近往复运动, 即平衡点是稳定的, 但不是渐近稳定的. 这也与我们在 2.2 节中分析的结果一致.

3.3 当 $\omega = \omega_c$ 时

通过 2.3 节分析, 我们知道此时珠子可在任何位置平衡. 选取不同的初始位置 X_0 作为平衡位置, 并给珠子施加一个小的初速度, 参数如表 3 所示.

表 3 $\omega = \omega_c$ 时数值模拟中的参数

参数名称	数值
抛物线轨道焦距距 ρ	1
重力加速度 $g/(m \cdot s^{-2})$	9.8
初始位置 X_0/m	0/1/2/3/4/5
初始速度 $\dot{Y}_0/(m \cdot s^{-1})$	0, 1
旋转轨道角速度 ω	ω_c

模拟结果如图 5 所示.

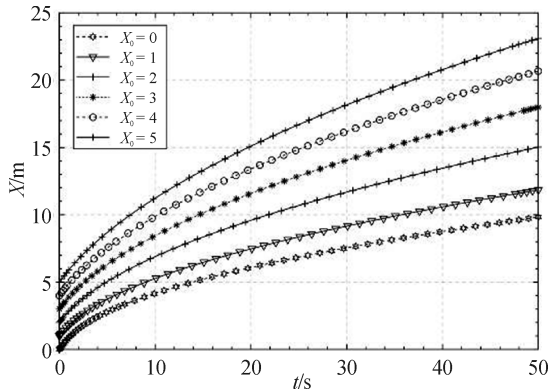


图 5 $\omega = \omega_c$ 放置在不同平衡位置时, 珠子运动情况的模拟结果图

从图 5 可以看出, 当 $\omega = \omega_c$ 时, 处在平衡位置的珠子若被施加一个小的初速度, 珠子都会随时间, 向 X 增大的方向运动, 即珠子会远离初始位置. 表明初始放置的平衡位置是不稳定的. 这与 2.3 节中平衡点是不稳定的结论相一致.

4 结论

本文研究了抛物线型旋转轨道上的珠子的运动这一非线性力学问题. 首先通过拉格朗日方程推导

出了珠子的运动方程, 并分析了珠子的平衡点. 接着基于微分方程的稳定性理论, 讨论了不同轨道转速时, 各平衡点的稳定性, 得出结论: 当转速大于等于临界角速度时, 平衡点是不稳定的, 若施加小的扰动, 珠子会向着远离平衡点的位置运动; 当转速小于临界角速度时, 平衡点是稳定的, 即便存在小的扰动, 珠子也会在平衡点附近做往复运动. 最后通过数值模拟, 验证了分析的结果, 并且更加直观地反映了珠子的运动情况.

参考文献

- 1 BASQUEROTTO C, RIGETTO E, Silva S D. Applications of the Lie symmetries to complete solution of a bead on a rotating wire hoop[J]. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences & Engineering*, 2018, 40(2): 48
- 2 BAKER T E, BILL A. Jacobi Elliptic Functions and the Complete Solution to the Bead on the Hoop Problem[J]. *American Journal of Physics*, 2012, 80(6): 506 ~ 514
- 3 Burov A A, Nikonov V I. Motion of a heavy bead along a circular hoop rotating around an inclined axis - Science Direct[J]. *International Journal of Non - Linear Mechanics*, 2021, 137(Dec.): 103791, 1 ~ 103791, 11
- 4 胡静, 彭芳麟, 管靖, 等. 理论力学中非线性问题的 MATLAB 数值解[J]. *大学物理*, 2001(10): 39 ~ 41
- 5 李元杰, 汤正新. 现代数值计算、模拟技术与力学典型模型教学[J]. *大学物理*, 2002(10): 35 ~ 39
- 6 杨百愚, 王翠香, 王斌科, 等. 秋千参数自激振动的数学模型与数值模拟[J]. *大学物理*, 2020, 39(1): 53 ~ 56
- 7 王高雄. 常微分方程(第 3 版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006. 286 ~ 287

The Motion Question of a Bead on Parabolic Rotating Track

Cao Yuxuan Jiang Jiangang

(College of Science, Northwest Agriculture and Forestry University, Xianyang, Shaanxi 712100)

Abstract: In this work, the equation of motion satisfied by the bead on a parabolic rotating orbit is derived through the Lagrange equation. Moreover, the equilibrium point of the bead is discussed. Then the stability of the equilibrium point is analyzed by using the stability theory of differential equations. Finally, By using numerical simulation, the trajectory of the beads is obtained and the conclusions of the analysis are verified.

Key words: parabolic rotating orbit; differential equations; stability theory; numerical simulation