竞赛与物理专题研修

关于弹性碰撞的一个普遍结论及其应用

郑　金

（凌源市职教中心　辽宁 朝阳　122500）

（收稿日期：2022 - 05 - 01）

摘　要：按线状刚体有无固定转动轴的两种情形，推导了有关质点与刚体发生弹性碰撞的一个结论；对两个质点、两个刚体、单个质点与刚体的弹性碰撞，归纳一个普遍的结论；利用该结论和其他物理规律，巧妙解答几道物理竞赛题.

关键词：线状刚体；弹性碰撞；相对速度；接近速度；分离速度

若两个自由质点发生弹性碰撞，则碰撞前的接近速度等于碰撞后的分离速度. 对于两个不可看作质点的平动刚体的弹性碰撞，也遵循相似的规律：若两个面状刚体在同一平面内发生弹性碰撞，则碰撞前后在沿碰撞力方向的相对速度大小相等[1]. 对于质点与刚体的弹性碰撞，也遵循相似的规律：若质点与刚体发生弹性碰撞，则碰撞前的接近速度等于碰撞后的分离速度[2]. 下面采用比较简单的方法来推导这个结论，然后直接利用该结论来解答几道有关弹性碰撞的物理问题.

1　结论推导

下面分别按线状刚体有无固定转动轴的两种情形来推导结论.

1.1　线状刚体有固定转动轴的情况

如图 1 所示，在光滑的水平面上放置一根质量为 M，长为 l 的均匀直杆，在左端 O 有竖直固定转动轴. 质量为 m 的质点以垂直于杆的水平速度 v_0 与其右端发生弹性碰撞，若碰撞后瞬时质点的速度大小变为 v_1，杆的右端做圆周运动的线速度大小为 v_2，则 3 个速度满足什么数量关系？

图 1　有固定转轴的直杆

分析：设杆发生转动的角速度为 ω，杆绕一端的转动惯量为 I，对固定转动轴 O 而言，系统不受外力矩的作用，对系统由角动量守恒定律有

$$lmv_0 = lmv_1 + I\omega$$

弹性碰撞不产生热量，对系统由机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

将两个方程分别化简为

$$v_0 - v_1 = \frac{I\omega}{lm}$$

$$v_0^2 - v_1^2 = \frac{I\omega^2}{m}$$

利用平方差公式，联立两个方程可得

$$v_0 + v_1 = l\omega$$

由于碰撞后瞬时杆的右端做圆周运动的线速度大小 $v_2 = l\omega$，则有方程

$$v_0 - 0 = v_2 - v_1$$

在碰撞前，小球逐渐靠近直杆，小球相对于直杆右端运动的速度为 $v_0 - 0$，称为相对接近速度；在碰撞后，直杆右端逐渐与小球分离，杆右端相对于小球运动的速度为 $v_2 - v_1$，称为相对分离速度. 这表明，若质点与有固定转轴的刚体发生弹性碰撞，则碰撞前的接近速度等于碰撞后的分离速度.

1.2　线状刚体无固定转动轴的情况

如图 2 所示，在光滑的水平面上放置一根质量为 M 的直杆，一个质量为 m 的质点以垂直于杆的水

作者简介：郑金（1966－　），男，本科，高级讲师，研究方向为高考题、竞赛题、各种疑难问题的解法.

平速度 v_0 与其发生弹性碰撞，被碰撞点到杆的质心 C 的距离为 l. 若碰撞后瞬时质点的速度大小变为 v_1，杆上被碰撞点的速度大小为 v_2，则这 3 个速度满足什么数量关系？

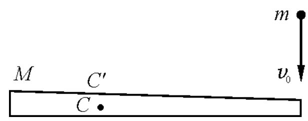

图 2　无固定转轴的直杆

分析：设杆发生转动的角速度为 ω，杆绕质心转动的转动惯量为 I_C，选择与直杆质心 C 重合的空间固定点 C' 为参考点，质点与直杆组成的系统不受外力矩的作用，对系统由角动量守恒定律有

$$lmv_0 = lmv_1 + I_C\omega \tag{1}$$

系统受到的合外力为零，对系统由动量守恒定律有

$$mv_0 = mv_1 + Mv_C \tag{2}$$

弹性碰撞不产生热量，对系统由机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 \tag{3}$$

由式(1)、(2) 可得

$$I_C = \frac{Mlv_C}{\omega} \tag{4}$$

将式(2)、(3) 分别化简为

$$v_0 - v_1 = \frac{M}{m}v_C \tag{5}$$

$$v_0^2 - v_1^2 = \frac{M}{m}v_C^2 + \frac{Ml\omega}{m}v_C \tag{6}$$

利用平方差公式，联立式(5)、(6) 可得

$$v_0 + v_1 = v_C + l\omega \tag{7}$$

碰撞后瞬时杆上的碰撞点相对于质心 C 做圆周运动的线速度大小 $v' = l\omega$，即相对速度大小

$$v_2 - v_C = l\omega \tag{8}$$

联立式(7)、(8) 可得

$$v_0 - 0 = v_2 - v_1$$

这表明，若质点与无固定转轴的线状刚体发生弹性碰撞，则碰撞前的接近速度等于碰撞后的分离速度.

从上述推导过程以及所得结果可知，这个结论与线状刚体的形状、质量分布、被碰撞点的位置以及刚体是否有固定转动轴都无关. 既然结论是应用几个守恒定律推出的，那么利用结论和几个守恒定律，即可求出某些物理量.

总之，对于两个质点、两个刚体、单个质点与刚体的弹性碰撞，无论是否受到理想约束，都遵循一个普遍的结论，即碰撞前的接近速度等于碰撞后的分离速度. 直接利用该结论解题，可化繁为简.

2　结论应用

下面按 3 种情形分别进行举例分析.

2.1　质点跟有固定转轴的线状刚体发生弹性碰撞

对于这类问题，在对系统应用角动量守恒定律列方程时，可选择固定转轴为参考点，属于惯性系.

【例 1】(第 30 届全国中学生物理竞赛复赛第 2 题，有删减）一长为 $2l$ 的轻质刚性细杆位于水平的光滑桌面上，杆的两端分别固定一质量为 m 的小物块 D 和一质量为 αm(α 为常数）的小物块 B，杆可绕通过小物块 B 所在端的竖直固定转轴无摩擦地转动. 一质量为 m 的小环 C 套在细杆上(C 与杆密接)，可沿杆滑动，环 C 与杆之间的摩擦可忽略. 一轻质弹簧原长为 l，劲度系数为 κ，两端分别与小环 C 和物块 B 相连. 一质量为 m 的小滑块 A 在桌面上以垂直于杆的速度飞向物块 D，并与之发生完全弹性正碰，碰撞时间极短. 碰撞时小环 C 恰好静止在距轴为 r($r > l$) 处. 若碰前滑块 A 的速度为 v_0，求碰撞过程中轴受到作用力的冲量[2].

解析：由于碰撞时间很短，则弹簧来不及伸缩碰撞已结束. 设碰后 A、C、D 的速度分别为 v_A、v_C、v_D，利用弹性碰撞的结论可知

$$v_0 = v_D - v_A \tag{9}$$

以 A、B、C、D 整体为系统，在碰撞过程中，系统相对于转轴的力矩为零，则角动量守恒，即

$$2lmv_0 = 2lmv_A + 2lmv_D + rmv_C \tag{10}$$

由于环 C 和球 D 随杆转动的角速度相同，则有

$$v_D = \frac{2l}{r}v_C \tag{11}$$

联立上述各式可得

$$v_A = -\frac{r^2}{8l^2 + r^2}v_0 \qquad v_C = \frac{4lr}{8l^2 + r^2}v_0$$

$$v_D = \frac{8l^2}{8l^2 + r^2}v_0$$

设碰撞过程中球 D 对 A 的作用力大小为 F'_1，以初速度方向为正方向，对球 A 由动量定理有

$$F'_1\Delta t = mv_A - mv_0 = -\frac{4l^2+r^2}{8l^2+r^2}v_0$$

可知球 A 对 D 的作用力 F_1 的冲量大小为

$$F_1\Delta t = \frac{4l^2+r^2}{8l^2+r^2}v_0$$

设轴对杆的作用力大小为 F_2，其方向与 F_1 的方向相同，对系统由动量定理有

$$F_2\Delta t + F_1\Delta t = mv_C + mv_D = \frac{4l(2l+r)}{8l^2+r^2}mv_0$$

轴对杆的作用力的冲量为

$$F_2\Delta t = \frac{2r(2l-r)}{8l^2+r^2}mv_0$$

可知轴受到杆的作用力的冲量方向与 v_0 的方向相反，冲量大小为

$$F'_2\Delta t = \frac{2r(2l-r)}{8l^2+r^2}mv_0$$

点评：为了求冲量，关键是先求出各小球的速度．还可利用刚体转动的瞬时角速度列方程，即式(10)替换为

$$2lmv_0 = 2lmv_A + I\omega$$

转动惯量为

$$I = m(2l)^2 + mr^2$$

式(11)替换为

$$v_D = 2l\omega$$

可求出角速度．

2.2 质点跟无固定转轴的线状刚体发生弹性碰撞

在对系统列角动量守恒方程时，可选择与刚体质心重合的空间固定点为参考点，属于惯性系．

【例 2】如图 3 所示，质量不等的两个小球 A 和 B 用长度为 l 的轻杆连接后放在光滑的水平面上，在水平面上的另一个质量为 m 的小球 D 以垂直于杆的速度 v_0 撞击质量为 m_2 的小球 B，发生弹性碰撞，求碰后瞬时 3 个小球的速度[3]．

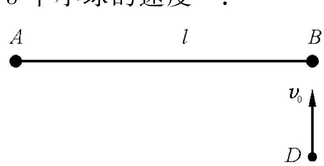

图 3 例 2 题图

解析：设小球 A 的质量为 m_1，由图 4 可知刚体的质心满足

$$l_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}l$$

$$l_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}l.$$

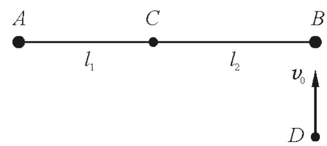

图 4 质心位置图

选择刚体质心处的空间固定点为参考点，设碰撞后球 D 的速度为 v，对系统由角动量守恒定律有

$$mv_0 l_2 = mvl_2 + I_C\omega \tag{12}$$

轻杆两端小球相对于质心的转动惯量为

$$I_C = m_1l_1^2 + m_2l_2^2 = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}l^2 \tag{13}$$

联立式(12)、(13)可得

$$mv_0 = mv + m_2l\omega \tag{14}$$

对系统由动量守恒定律有

$$mv_0 = mv + (m_1+m_2)v_C \tag{15}$$

联立式(14)、(15)可得

$$v_C = \frac{m_2l\omega}{m_1+m_2} \tag{16}$$

可见 $v_C = \omega l_1$，由此可知小球 A 的速度为零．则小球 B 的速度为

$$v_B = \omega l$$

利用弹性碰撞的结论可知

$$v_0 - 0 = v_B - v \tag{17}$$

把 $v_B = \omega l$ 代入式(17)可得

$$v_0 + v = l\omega \tag{18}$$

联立式(14)、(18)得

$$\omega = \frac{2mv_0}{(m_2+m)l}$$

$$v = \frac{m-m_2}{m+m_2}v_0$$

可知小球 B、D 的速度大小分别为

$$v_B = \omega l = \frac{2m}{m_2+m}v_0$$

$$v_D = v = \frac{m-m_2}{m+m_2}v_0$$

点评：解题关键是求出质心速度与角速度的关

系式，并且发现数量关系 $v_C=\omega l_1$，由此知小球 A 的速度为零. 在对系统列角动量守恒方程时，需选择刚体上特殊位置所在的空间固定点为参考点.

2.3　线状刚体跟固定平面刚体正面发生弹性碰撞

【例 3】 如图 5 所示，由刚性轻杆连接两个小球组成“哑铃”，在水平面上以垂直于固定墙面的速度 v_0 向右平动，且“哑铃”的轴与墙面成45° 角. 求：当“哑铃”与墙面发生弹性碰撞后将怎样运动[4]？

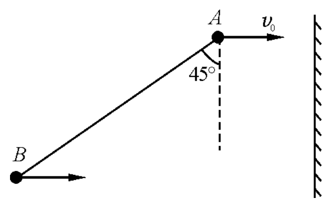

图 5　例 3 题图

解析：设球 A 与墙壁发生碰撞后“哑铃”系统的质心速度大小为 v_1，方向向左，两球绕质心转动的角速度为 ω，利用两个刚体发生弹性碰撞的结论可知

$$v_0=v_1+\omega\frac{l}{2}\cos 45°$$

选择球 A 与墙壁发生碰撞的位置为参考点，对系统由角动量守恒定律有

$$mv_0 l\cos 45°=2m\left(\frac{l}{2}\right)^2\omega-2mv_1\frac{l}{2}\cos 45°$$

联立上式可得

$$v_1=\frac{v_0}{3}$$

$$\omega=\frac{4\sqrt{2}\,v_0}{3l}$$

可知“哑铃”系统的质心以速度 $v_1=\frac{v_0}{3}$ 向左平动，两球相对于质心以速度 $v'=\frac{2\sqrt{2}}{3}v_0$ 做圆周运动[4].

点评：碰撞后系统质心速度方向向左，若选择向右为正方向，则可根据弹性碰撞的结论列出方程

$$v_0-0=0-\left[-\left(v_1+\omega\frac{l}{2}\cos 45°\right)\right]$$

在对系统应用角动量守恒定律列方程时，关键是在墙面上选择固定参考点即碰撞点作为惯性系，还要注意角动量的方向.

3　结论与讨论

综上所述，在列方程方面可得如下结论：

(1) 对于质点跟有固定转动轴的线状刚体发生碰撞问题，以及质点跟无固定转动轴的线状刚体发生弹性碰撞问题，为了求碰撞后刚体上某些特殊点的速度，可利用弹性碰撞的结论列出速度关系方程，对系统列出角动量守恒方程.

(2) 对于质点跟无固定转动轴的线状刚体发生弹性碰撞问题，还需对系统列出动量守恒方程.

(3) 对于线状刚体跟固定刚体发生弹性碰撞问题，为了求碰撞后刚体的运动情况，可利用弹性碰撞的结论列出速度关系方程，对系统列出角动量守恒方程.

总之，对于两个自由质点发生弹性碰撞，或者两个面状刚体在同一平面内发生弹性碰撞，或者单个质点与线状刚体发生弹性碰撞，或者线状刚体与固定刚体发生弹性碰撞，无论它们是否受到理想约束，都遵循一个相同的结论，即相互碰撞点在碰撞前的接近速度等于碰撞后的分离速度. 换言之，在碰撞力的方向上，所有弹性碰撞的恢复系数都为 1. 有趣的是，所有弹性碰撞都遵循“反射定律”，即在碰撞力的方向上，碰撞前的相对速度与碰撞后的相对速度大小相等，方向相反. 通过把原来只适用于两个自由质点间弹性碰撞的结论推广到两个刚体的弹性碰撞以及单个质点与刚体的弹性碰撞，使得结论更具一般性、广泛性和深刻性，显得更加完美和实用. 利用这个结论解答有关的弹性碰撞问题，不需列出能量守恒方程，由此可化繁为简. 此外，还可用来检验常规解法所得结果的正确性.

参 考 文 献

[1] 王孝广. 也证“平面平行运动刚体弹性碰撞前后相对速度大小相等”[J]. 物理通报，2021，40(5)：80－81，89.

[2] 俞超，黄晶，汪飞. 质点和刚体碰撞时的恢复系数[J]. 物理通报，2019，38(6)：55－57.

[3] 李惠. 浅谈自由转动支点的刚体碰撞类习题的解法[J]. 物理通报，2021，40(3)：78－81.

[4] 陈铁松. 平面平行运动的刚体弹性碰撞问题的探讨[J]. 物理通报，2020，39(7)：55－56.