数理结合巧解物理竞赛中的追逐问题

李　坤　　谢元栋
（华南师范大学物理与电信工程学院　广东 广州　510006）

（收稿日期：2022-05-13）

摘　要：使用两种不同的数学方法，数理结合，均能求解物理竞赛中常出现的追逐问题. 与其他惯用方法相比，可以发现数理结合法大幅度降低了解题难度，在求解物理竞赛问题中具有独特的优越性，值得推广.

关键词：物理竞赛；数理结合法；等角螺线；追逐问题

追逐问题在物理竞赛试题中时有出现，如 2021 年全国中学生物理竞赛预赛第 13 题即是. 求解这类问题的常用方法有微元法和相对速度法等[1-2]，但这些方法技巧性都较强，且需要多种方法组合使用，较难仅使用一种方法求出任意时刻的各运动量，给学生带来较大思维障碍. 本质上，问题的难度主要是运动轨迹的复杂性导致的，解题的关键也是求出对象的运动轨迹，一旦突破这个数学难点，相关物理问题也就迎刃而解. 数理结合法指充分利用数学规律和原理对物理问题的解决进行简化的研究方法[3]，笔者发现分别使用两种不同数学方法，即代数法和几何法，数形结合，均可一以贯之地解决追逐问题.

1　利用代数法求解

1.1　确定运动轨迹

2021 年物理竞赛原题呈现：6 个小朋友在操场上玩追逐游戏. 开始时，6 个小朋友两两间距离相等，构成一正六边形. 然后每个小朋友均以不变的速率 v 追赶前面的小朋友（即小朋友 1 追 2，2 追 3，3 追 4，4 追 5，5 追 6，6 追 1），在此过程中，每个小朋友的运动方向总是指向其前方的小朋友. 已知某一时刻 $t_0=0$，相邻两个小朋友的距离为 l，如图 1 所示. 试问：

（1）从 t_0 时刻开始，又经过多长时间后面的小朋友可追到前面的小朋友？

（2）从 t_0 时刻开始，直至追上前面的小朋友，每个小朋友又跑了多少路程？

（3）在 t_0 时刻，每个小朋友的加速度大小是多少？

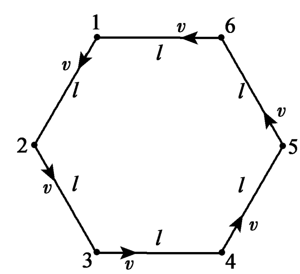

图 1　题图

此题的传统解法在此不作赘述，其结果是：追逐时间为 $\frac{2l}{v}$，追逐路程为 $2l$，初始加速度为 $\frac{\sqrt{3}v^2}{2l}$.

如图 2 所示，取 OA 为极坐标的极轴建立坐标系，曲线 s 表示小朋友运动轨迹（尚不知具体方程）.

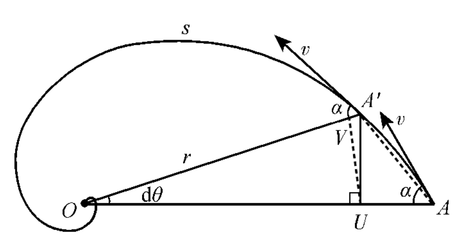

图 2　建立坐标系进行分析

据题意，任意时刻速度方向都沿曲线切向，且与半径夹角不变，即图中的 α 角大小不变，令初始 OA 长度为 R. 则有

$$|AA'| \approx -\mathrm{d}s \tag{1}$$

$$|AU| \approx (|OA'| - |OA|) = -\mathrm{d}r \tag{2}$$

作者简介：李坤（1987－　），男，在读硕士研究生，研究方向为中学物理教材、教法.
通讯作者：谢元栋（1965－　），男，副教授，研究方向为凝聚态、中学物理.

$$|A'U| \approx r\mathrm{d}\theta \tag{3}$$

此处有“—”代表曲线轨迹以 A 为起点，O 为终点，$\mathrm{d}s$ 与 $\mathrm{d}r$ 恒为负.

根据几何关系对于曲线 s 恒有

$$\cot\alpha = \frac{|AU|}{|A'U|}$$

代入式(1)、(3)得

$$\cot\alpha = \frac{|AU|}{|A'U|} = -\frac{\mathrm{d}r}{r\mathrm{d}\theta}$$

分离变量后两边积分得

$$\ln r = -\theta\cot\alpha + C$$

代入初始条件化简得

$$r(\theta) = R\mathrm{e}^{-\theta\cot\alpha} \tag{4}$$

显然这是一条等角螺线在极坐标系中的方程[4].

总路程长度(从 A 到 O 轨迹长度)的求解如下.

根据勾股定理有

$$|AA'|^2 = |AU|^2 + |A'U|^2$$

代入式(1)～(3)得

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}r)^2 + (r\mathrm{d}\theta)^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + r^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -R\mathrm{e}^{-\theta\cot\alpha}\cot\alpha = -r\cot\alpha$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}r)^2 + (r\mathrm{d}\theta)^2} = \sqrt{(-r\cot\alpha)^2 + r^2}\,\mathrm{d}\theta$$

即
$$\mathrm{d}s = \frac{R}{\sin\alpha}\mathrm{e}^{-\theta\cot\alpha}\mathrm{d}\theta$$

上式两边积分得任意时刻的路程

$$s(\theta) = \frac{R}{\cos\alpha}\mathrm{e}^{-\theta\cot\alpha}$$

$$s(\theta) = \frac{r(\theta)}{\cos\alpha} \tag{5}$$

根据曲率半径定义

$$\rho = \lim_{\Delta\theta\to 0}\left|\frac{\Delta s}{\Delta\theta}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{r}{\cos\alpha}\right)\right|$$

代入式(4)恒有

$$\rho(\theta) = \frac{R}{\sin\alpha}\mathrm{e}^{-\theta\cot\alpha}$$

$$\rho(\theta) = \frac{r(\theta)}{\sin\alpha} \tag{6}$$

1.2　问题的求解

求解竞赛题(1)、(2)问. 依据式(5)，从 t_0 时刻开始，直至追上前面的小朋友，每个小朋友所跑总路程即为总路程

$$s = \int_0^{+\infty}\frac{R}{\sin\alpha}\mathrm{e}^{-\theta\cot\alpha}\mathrm{d}\theta = \frac{R}{\cos\alpha}$$

代入初始条件 $R = l$，$\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ 得

$$s = 2l$$

故追上前面的小朋友所用时间为

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2l}{v}$$

求解竞赛题(3)问. 根据式(6)等角螺线在初始位置的曲率半径为

$$\rho(0) = \frac{l}{\sin\dfrac{\pi}{3}} = \frac{2l}{\sqrt{3}}$$

而小朋友切向加速度 $a_\tau = 0$，只有法相加速度，故

$$a = a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\sqrt{3}v^2}{2l}$$

答毕.

以上便是使用代数方法解决轨迹问题，即通过建立极坐标系，求出小朋友的运动轨迹方程，继而解得轨迹路程、时间和加速度. 但从数学角度来说，还可以直接运用几何法求解，使问题变得更为简单.

2　利用几何法求解

如图 3 所示，设 6 个小朋友依次为点 A、B、C、D、E、F，由对称性可知每个小朋友的运动情况必然动态一致，即任意时刻 $ABCDEF$ 围成图形都是以 O 为中心的正六边形.

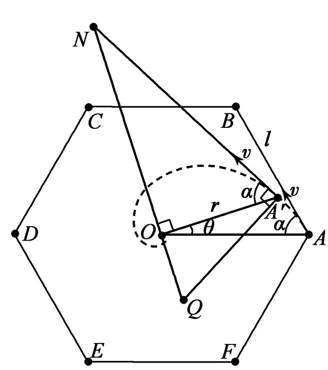

图 3　性质 1 和性质 2 图示

以 A 为研究对象，显然 A 在任一时刻的速度 v 方向皆是其运动轨迹的切线方向，且这一方向总是指向 AB，则任意时刻都有 $\angle OA'N = \angle OAB \equiv \alpha \equiv \dfrac{\pi}{3}$，即曲线极轴与切线的夹角恒为常数，符合这一几

何特征的曲线 S，如图中虚线所示，一定是一条等角螺线，事实上，这正是等角螺线的数学定义．且等角螺线有如下几何性质：

性质 1：如图 3 所示，取等角螺线上任意一点 A'，作曲线切线 $A'N$，与 OA' 垂线 ON 交于 N 点，则线段 $A'N$ 与曲线弧长 $\overset{\frown}{A'O}$ 等长．

性质 2：如图 3 所示，继续作切线 $A'N$ 的垂线 QA'，与 OQ 交于 Q 点，则线段 QA' 即为等角螺线在 A' 处的曲率半径．

性质的证明过程可参考式(4)、(5)、(6)，此处从略．有了以上几何性质，再来求解竞赛题第(1)、(2)问，过程如下：

结合所作图 3，依据性质 1，从 t_0 时刻开始，直至追上前面的小朋友，每个小朋友所跑路程

$$s = |A'N| = \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{l}{\cos\frac{\pi}{3}} = 2l$$

则从 t_0 时刻开始，直至追上前面的小朋友所用时间

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2l}{v}$$

求解第(3)问：结合图 3，依据性质 2 得 t_0 时刻等角螺线的曲率半径

$$\rho(0) = |QA'| = \frac{l}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2l}{\sqrt{3}}$$

而小朋友切向加速度 $a_\tau = 0$，只有法相加速度，故

$$a = a_n = \frac{v^2}{\rho(0)} = \frac{\sqrt{3}v^2}{2l}$$

答毕．

求解过程干净利落．可见直接使用等角螺线的几何性质，可化繁为简，大大降低本题解答难度．

3　情境拓展

拓展 1：本题情境是 6 个小朋友的追逐问题，事实上对于 3 个以上任意 n 个小朋友的追逐问题，解答方法一样，都是以其中 1 个小朋友为研究对象，根据几何关系，只需将初始角度 α 取作 $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\pi$，极轴长度 R 取作 $\frac{l}{2\sin\frac{\pi}{n}}$ 即可．继续运用几何法，过程如下．

从 t_0 时刻开始，每个小朋友所跑路程

$$s = |A'N| = \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{l}{2\sin^2\frac{\pi}{n}}$$

从 t_0 时刻开始，直至追上前面的小朋友所用时间

$$t = \frac{s}{v} = \frac{l}{2v\sin^2\frac{\pi}{n}}$$

t_0 时刻等角螺线的曲率半径

$$\rho = |QA| = \frac{r}{\sin\alpha} = \frac{l}{\sin\frac{2\pi}{n}}$$

则小朋友加速度

$$a = a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2\sin\frac{2\pi}{n}}{l}$$

答毕．

拓展二：本题第(3)问是求在 t_0 时刻每个小朋友的加速度，那么对于任意 $t\left(0\leqslant t\leqslant\frac{2l}{v}\right)$ 时刻，小朋友的加速度又是多少呢？仍然运用几何法予以解答．

如图 4 所示，对于小朋友 A，过点 A 作曲线 s 切线及切线的垂线，作极轴 OA 垂线，三者分别交于点 N、Q．

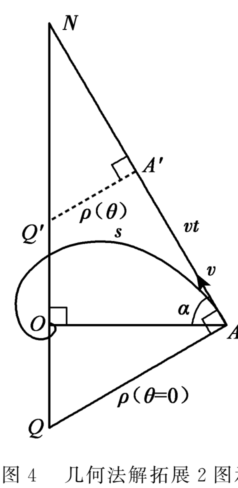

图 4　几何法解拓展 2 图示

根据(1)、(2)、(3)问计算结果可知，t_0 时刻螺线总长

$$|AN| = 2l$$

A 处的曲率半径

$$|QA| = \frac{2\sqrt{3}}{3}l$$

而任意 t 时刻，小朋友 A 运动路程 $\Delta s = vt$，可化曲为直，视作 A 沿直线 AN 运动到 A'，A' 点满足

科学计算软件辅助下“传送带”模型的简化处理

郑　磊　赵秋爽　谢天扬
（北京市和平街第一中学　北京　100107）

（收稿日期：2022－10－18）

摘　要：“传送带”模型是高中运动学综合应用的典型模型，一般将物体在传送带上的运动分为多个过程，应用匀变速直线运动规律联立方程解决问题，解题过程繁琐，特别是传送带带动物体运动的形式复杂多样，对模型的分析难度很大．若是利用 Mathematica(MMA) 科学计算软件，模拟不同初始条件下物体在传送带上的运动过程，绘制运动图像，总结规律，从 $v-t$ 图像的角度解决问题，可以极大地降低学生对传送带问题的学习难度．

关键词：Mathematica；科学计算软件；匀变速直线运动；传送带问题

1　“传送带”模型的常规处理方法

在高中物理一线教学中，一般采用以下方法处理“传送带”问题：首先分析物体的初速度与传送带速度，确定物体所受摩擦力的方向；将物体的运动分为多个运动过程，列出匀变速直线运动方程，联立求

$$|A'N|=|AN|-|AA'|=2l-vt$$

结合性质 1 与性质 2，易得

$$\frac{|Q'A'|}{|A'N|}=\tan\alpha$$

继续作直线 $Q'A'$ 垂直于 AN，与 QN 交于点 Q'，那么，此时小朋友 A 所在点处的曲率半径长即为 $|Q'A'|$，根据三角形相似有

$$\frac{|Q'A'|}{|QA|}=\frac{|A'N|}{|AN|}$$

代入数据化简得

$$\rho(t)=|Q'A'|=\frac{\sqrt{3}}{3}(2l-vt)$$

$$a=a_{\mathrm{n}}=\frac{v^2}{\rho(t)}=\frac{\sqrt{3}v^2}{2l-vt}$$

答毕．

相比于 t_0 时刻的加速度，可以发现这个结果只是将分母中的“$2l$”换成了“$2l-vt$”，若将 A' 看作小朋友运动的新起点，那这一点便是自洽的，因为同曲线 AO 一样，剩余曲线仍是一条等角螺线，且两者互为相似关系，比例系数便是 $\frac{2l-vt}{2l}$．这也体现出等角螺线的深层对称性，即经过一定变换后的曲线仍是等角螺线，难怪著名数学家雅各布·伯努利希望把它刻在墓碑上来寄托自己“纵然变化，依然故我”的志向．

4　教学启示

总之，对于追逐问题，无论采用代数法还是几何法，只要抓住运动轨迹这一点，都达到了仅使用一种方法解答全部 3 问的目的，尤其使用等角螺线几何性质的几何法，大大降低了追逐问题的求解难度．可见数理结合法在解决物理竞赛题中有其独特的优越性，值得推广．同时在实际教学过程中，物理竞赛教练也要重视夯实学生的数学基础，启发学生从多个视角审视同一物理问题，获取其中的数学模式，这正是锻炼学生发散思维，提升学生创新能力的重要途径．

参 考 文 献

[1] 张大同．物理竞赛教程(高中第一分册)[M]．上海：华东师范大学出版社，2020：22．
[2] 吕艳坤．一道运动学竞赛试题的多解赏析[J]．物理教学，2020(7)：68－69，73．
[3] 钟云杰，柏露枝．数理结合的赛题典例——第 35 届全国中学生物理竞赛预赛第 6 题的 4 种解法[J]．物理教师，2019，40(6)：95－97．
[4] 黄晶．迷人的等角螺线[J]．物理教师，2008(3)：31－32．