螺绕环磁场的镜像对称性分析*

张利绒　刘俊杰
（内蒙古大学物理科学与技术学院　内蒙古 呼和浩特　010021）

（收稿日期:2022－05－16）

摘　要:利用安培环路定理求解长直导线、长直螺线管、螺绕环等载流系统的磁场时,对称性分析是选取闭合回路的关键.通过分析解螺绕环磁场时的镜像对称条件,说明合理应用对称性分析,能够使求解电场和磁场问题的图像更清晰、计算更简化、表述更准确.因此,在电磁学教学中应给予对称性分析足够的重视.

关键词:螺绕环;磁场;镜像对称

1　引言

根据毕奥-萨伐尔定律和磁场的叠加原理,能够对稳恒电流所激发的磁场进行求解.当稳恒电流具有空间分布对称性时,其激发的磁场也具有相应的对称性[1].例如,无限长载流直导线的磁场是围绕直导线的同心环,具有轴对称性;密绕长直载流螺线管内任意点的磁场方向都与管轴平行,磁场也具有对称性[2].若已知磁场空间分布的对称性,利用安培环路定理求解磁场时,求解过程简单,物理意义明确.但在应用该方法时,首先需要进行磁场空间分布的对称性分析.只有根据场源的对称性,分析得到场的对称性,才能正确理解和应用环路定理,得到问题的解[3].本文通过载流螺绕环磁场的求解过程,详细分析利用环路定理求解磁场时的对称性条件.

一个系统在任何操作或变换下的不变性,都是对称性.例如,绕固定轴旋转的不变性是轴对称性,绕固定点旋转的不变性是球对称性,沿特定方向平移的不变性是平移不变性,等等.除旋转、平移等操作外,还有一种几何变换——“空间反射”操作,在空间反射变换下的不变性称为镜像对称性[4-5].在空间反射操作下,根据矢量所满足的变换规律,可将它们分为极矢量和轴矢量.极矢量满足的规律是与镜面垂直的分量反向,平行分量不变;轴矢量满足的规律是与镜面垂直的分量不变,平行分量却反向.磁感应强度是轴矢量,因而在“空间反射”操作下满足轴矢量的变换规律.

电磁学中应用安培环路定理求解某些具有一定对称性的载流导线的磁场分布时,利用了磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 作为轴矢量的一个推论:镜面对称的载流系统在镜面处产生的磁感应强度必与该面垂直[5].对这个推论的理解可分为3个部分:(1) 电流源满足镜面对称;(2) 空间位置是在镜面处;(3) 结论是源所激发的磁场与镜面垂直.需要指出的是,根据这一推论的内容分析螺绕环的磁场时,需要加上电流分布具有轴对称性,才能得到磁感应线是与螺绕环共轴的圆圈的结论,这在赵凯华先生的教材中已经给出注释[5].本文将针对这一问题,基于毕奥-萨伐尔定律,详细分析螺绕环问题中载流系统的对称性及其激发的磁感应强度分布的对称性特征,为深入探索磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的对称性和磁场问题的求解提供依据.

2　利用毕奥-萨伐尔定律验证推论

如图1(a) 所示,设有一对电流元 $I\mathrm{d}l_1$ 和 $I\mathrm{d}l_2$,关于镜面 S 对称,求它们在镜面处产生的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$.为了方便求解,我们将这对电流元分解为平行于镜面的电流分量 $I\mathrm{d}l_{i\parallel}$ ($i=1,2$) 和垂直于镜面的电流元分量 $I\mathrm{d}l_{i\perp}$ ($i=1,2$).

首先,考虑垂直于镜面的电流分量 $I\mathrm{d}l_{i\perp}$ ($i=1,$

* 2019 年内蒙古大学本科主干核心课程建设项目《电动力学 A》;内蒙古大学本科主干核心课程建设项目《电磁学》,2019 年内蒙古大学“课程思政”示范课建设项目《电磁学》.

作者简介:张利绒(1972－　),女,教授,教学研究方向为电磁学与电动力学.

2）在镜面 S 上任一点 P 处所产生的磁感应强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{\perp}$，如图 1(b) 所示. 根据毕奥-萨伐尔定律，$I\mathrm{d}l_{1\perp}$ 和 $I\mathrm{d}l_{2\perp}$ 在 P 点处产生的磁感应强度分别为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{1\perp} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{1\perp}\times\boldsymbol{r}_{1\perp}}{r_{1\perp}^3} \\ \mathrm{d}\boldsymbol{B}_{2\perp} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{2\perp}\times\boldsymbol{r}_{2\perp}}{r_{2\perp}^3}\end{aligned} \tag{1}$$

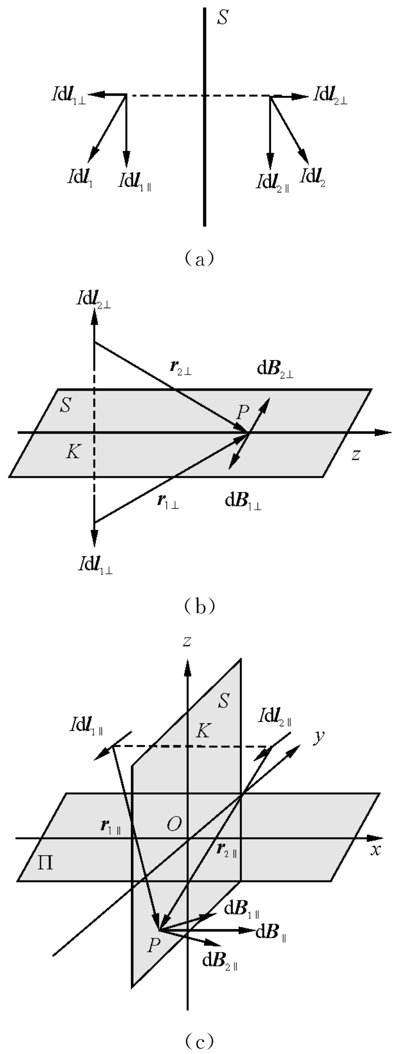


图 1　镜面对称电流元在镜面处激发的磁感应强度

结果表明，两电流元在 P 点的磁感应强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{1\perp}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{2\perp}$ 的方向垂直于电流元与 P 点所确定的平面，且处于镜面 S 内. 实际上，设电流元垂直镜面分量于镜面处的投影为 K 点，则面内任意一点 P 的磁感应强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{1\perp}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{2\perp}$ 始终与 KP 垂直. 另外，由于这两个垂直方向的电流元关于镜面 S 对称，由式(1) 可知其激发的磁感应强度大小相等，方向相反，相互抵消.

结论 Ⅰ：垂直于镜面且关于镜面对称的两电流元在镜面处所激发的合磁感应强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{\perp}$ 为零，即 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{\perp}=0$.

其次，考虑平行于镜面的电流分量 $I\mathrm{d}l_{i\parallel}$ ($i=1$，2) 在镜面 S 上任一点 P 处所产生的磁感应强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{\parallel}$，如图 1(c) 所示. 根据毕奥-萨伐尔定律，$I\mathrm{d}l_{1\parallel}$ 和 $I\mathrm{d}l_{2\parallel}$ 在 P 点处产生的磁感应强度分别为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{1\parallel} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{1\parallel}\times\boldsymbol{r}_{1\parallel}}{r_{1\parallel}^3} \\ \mathrm{d}\boldsymbol{B}_{2\parallel} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{2\parallel}\times\boldsymbol{r}_{2\parallel}}{r_{2\parallel}^3}\end{aligned} \tag{2}$$

结果表明，P 点处 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{1\parallel}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{2\parallel}$ 的方向分别垂直于 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{1\parallel}$ 与 $\boldsymbol{r}_{1\parallel}$、$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{2\parallel}$ 与 $\boldsymbol{r}_{2\parallel}$ 所确定的平面，且与镜面 S 成一定的角度. 同时，由于这两个平行方向的电流元关于镜面 S 对称，由式(2) 可知其激发的磁感应强度大小相等，并且关于平行于 x 轴且过 P 点的轴线对称，所以叠加后的磁感应强度矢量平行于 x 轴，即垂直于镜面 S.

结论 Ⅱ：平行于镜面且关于镜面对称的两电流元在镜面处所激发的合磁感应强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{\parallel}$ 与镜面垂直.

进一步分析可以发现，在两平行电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{1\parallel}$ 和 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{2\parallel}$ 确定的平面 M 和镜面 S 的交线上任一点处，两电流元所激发的磁感应强度关于平面 M 对称，大小相等，方向相反，且垂直于平面 M，相互抵消，此时 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{\parallel}=0$.

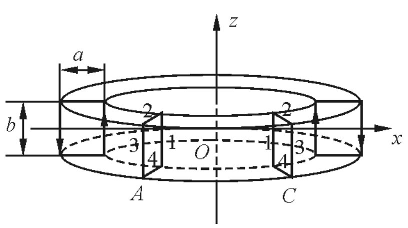
综上所述，一对镜面对称的电流元可以分解为与镜面垂直的对称电流元对和与镜面平行的电流元对，所激发的磁感应强度是它们所激发的磁感应强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{\perp}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{\parallel}$ 的叠加，合磁感应强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 与镜面垂直，特殊点处 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}=0$. 以上我们根据毕奥-萨伐尔定律，分析验证了推论：镜面对称的载流系统在镜面处产生的磁感应强度必与该面垂直.

3　螺绕环载流系统在镜面处磁感应强度的对称性特征

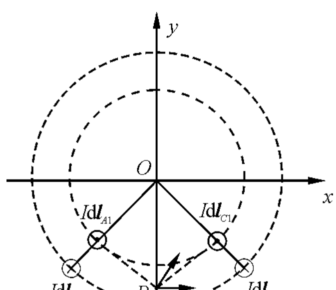
方便起见，我们设螺绕环的截面为矩形，O 点为螺绕环对称轴 z 与螺绕环水平对称面的交点，且矩形电流环的几何中心到 O 点距离为 R. 在水平对称面内，取过 O 点且垂直于 z 轴的任一方向为 x 轴，y 轴垂直 xz 平面向里，构建直角坐标系如图 2(a) 所

示. 进一步,在螺绕环上取关于 yz 平面镜像对称的矩形电流环 A 和 C 为研究对象,求这两个电流环在镜面处的磁感应强度,并分析它们所激发磁感应强度的对称性.

首先,推论保证平行于对称轴 z 的电流所激发的磁感应强度垂直于镜面. 如图 2(b) 所示,为矩形螺绕环水平对称截面图. 设在镜面 yz 上矩形电流环的几何中点为 P,则 P 点和螺绕环中心 O 点的连线即为 y 轴,且 y 轴和 z 轴构成镜面 S,矩形电流环 A 和 C 关于镜面对称且平行于镜面的电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{A1}$ 和 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{C1}$ 垂直纸面向外,$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{A3}$ 和 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{C3}$ 垂直纸面向里. 与镜面 S 平行且镜像对称的电流 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{A1}$ 和 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{C1}$ 在 P 点所激发的合磁感应强度与镜面垂直,方向为水平向右[如图 2(b)]. 同理,电流 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{A3}$ 和 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{C3}$ 在 P 点所激发的合磁感应强度也与镜面垂直. 根据叠加原理,矩形电流环 A 和 C 中与镜面平行的所有电流在 P 点产生的磁感应强度应沿中心环线的切向,即垂直于镜面 S.



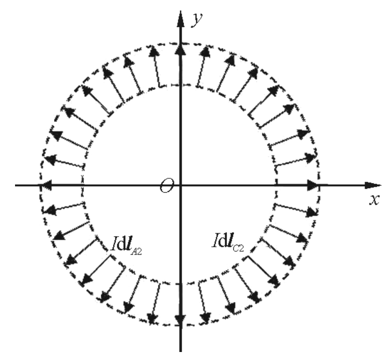
(a)



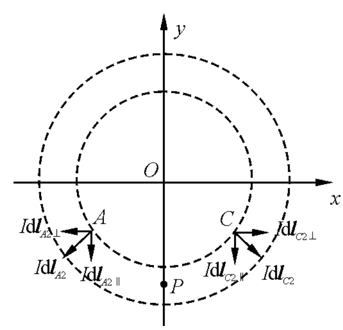
(b)

图 2　平行于螺绕环对称轴 z 的电流的磁感应强度

螺绕环中除平行于轴线的电流部分外,还存在垂直于对称轴 z 轴方向的电流部分. 仍以关于 yz 平面镜像对称的矩形电流环 A 和 C 作为研究对象,如图 3(a) 所示,为螺绕环上电流分布的示意图. 为方便讨论,我们将电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{A2}$ 和 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{C2}$ 分解为平行于镜面的电流分量 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{A2\parallel}$ 和 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{C2\parallel}$,以及垂直于镜面的电流分量 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{A2\perp}$ 和 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{C2\perp}$,如图 3(b) 所示. 考虑镜面 yz 上矩形电流环的中点 P 处,对于平行于镜面的电流分量 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{A2\parallel}$ 和 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{C2\parallel}$,根据结论 Ⅱ 可知其激发的磁感应强度一定垂直于镜面. 对垂直于镜面的电流分量 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{A2\perp}$ 和 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{C2\perp}$,根据结论 Ⅰ 可知其在镜面处所激发的磁感应强度为零. 同理,可对矩形电流环 A 和 C 中的电流 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{A4}$ 和 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{C4}$ 得到同样的结论. 根据磁场的叠加原理,矩形电流环 A 和 C 中垂直于对称轴 z 轴的电流在镜面处所激发的磁感应强度一定垂直于镜面.



(a)



(b)

图 3　垂直于螺绕环对称轴 z 的电流的磁感应强度

因此,螺绕环中的电流可看作是由一对对镜像对称的矩形环构成. 根据以上分析可知,每一对矩形环在镜面处所激发的磁感应强度一定垂直于镜面,则根据磁场叠加原理,矩形螺绕环在镜面处所激发的磁感应强度一定垂直于镜面,沿螺绕环中心环线的切线方向. 这一结果与磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 作为轴矢量,利用推论(镜面对称的载流系统在镜面处产生的磁感应强度必与该面垂直) 所得到的结果完全一致. 以上结论虽然是从矩形截面螺绕环的特例推导出来的,其实它可以推广至任意截面形状的螺绕环. 为了说明这个结论,我们只需将螺绕环中截面线圈局部的电流微元分解为平行于 z 轴分量和垂直于 z 轴分量后按前述方法分析即可.

4 利用环路定理求解螺绕环的磁感应强度

以上分析说明，螺绕环在镜像对称面上的磁感应强度垂直于镜面. 那么，如何保证与环共轴的圆圈上磁感应强度的大小处处一致呢？进一步，由螺绕环载流系统具有轴对称性，根据对称性原理的核心思想之一 —— 对称的条件必能得出对称的结论，可知螺绕环在共轴圆圈上的磁感应强度大小只与该圆的半径有关，且方向沿圆周的切线方向，即螺绕环的磁感应线是与环共轴的圆圈.

根据环路定理，在螺绕环外取任一闭合回路，所包围的电流的代数和为零，因此螺绕环外的磁感应强度恒为零. 在螺绕环内部，取一半径为 R 的闭合回路，由环路定理得

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 NI \qquad B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} \tag{3}$$

若环很细，环内各处的半径 R 差别不大，设螺绕环截面圆的半径为 a，当 $a \ll R$ 时其内部的磁感应强度大小几乎不变.

5 讨论

对称性是现代物理的重要概念，对称性要求对物理定律的形式提出强有力的限制[6]. 稳恒磁场是经典矢量场，由相应的场源 —— 稳恒电流激发产生，整个场矢量的空间分布由场源的空间分布确定. 当场源分布具有某种对称性时，场的分布就具有相同的对称性. 对称性分析是应用安培环路定理求解问题过程中选取闭合回路的关键. 但是，在实际教学过程中往往用“由对称性分析可知”一句话带过，很难引起学生足够的重视，造成学生对相关物理内容理解不够深入. 赵凯华先生新版的《电磁学》中，利用环路定理求解无限长载流直导线、无限长螺线管、螺绕环等载流系统的磁感应强度的内容，加强了关于对称性的分析，使问题的物理图景更清晰、计算过程更严谨. 因此，在电磁学教学实践中，进一步加强矢量场对称性分析讲解，对学生深入理解电磁场的物理性质大有裨益.

参 考 文 献

[1] 李复，王秉严. 场源分布的对称性与场分布的对称性[J]. 工科物理，1997(3)：1－7.

[2] 余仕成，周金华. 载流长直螺线管和螺绕环的磁场对称性分析[J]. 武汉工程大学学报，2010，32(5)：106－110.

[3] 陈熙谋，赵凯华. 电磁学教学中对称性分析的积极意义[J]. 大学物理，2005，24(4)：3－10.

[4] 赵凯华. 新概念物理教程 —— 电磁学[M]. 北京：高等教育出版社，2003.

[5] 黄奕斌，聂义友. 镜像对称性在电磁学中的应用[J]. 大学物理，2007，26(10)：24－30.

[6] 李复. 电磁场的对称性分析[J]. 物理与工程，2006，16(1)：37－42.

Analysis on Mirror Symmetry of Magnetic Fields in Toroids

ZHANG Lirong LIU Junjie

(School of Physical Science and Technology, Inner Mongolia University, Hohhot, Inner Mongolia 010021)

Abstract: Symmetry analysis is the key to choosing a closed curve when the magnetic fields of some current-carrying systems are solved, such as long straight current-carrying wires, long solenoids, and toroids by using Ampere's loop law. In this paper, we analyzed in detail the mirror symmetry conditions for solving the magnetic field of a toroid. The analysis shows that the rational application of symmetry analysis can make the image clearer, the calculation simpler, and the description more accurate when solving problems of electric and magnetic field. Therefore, symmetry analysis should be given enough attention in electromagnetism courses.

Key words: toroid; magnetic field; mirror symmetry