用单摆测重力加速度大小的实验数据处理探讨

李　宁
（北京市第九中学　北京　100041）
成炀玉
（北京市人大附中石景山学校　北京　100042）
丁庆红
（北京教育学院石景山分院　北京　100043）

（收稿日期:2022-05-31）

摘　要:应用4种方法对用单摆测量重力加速度大小的实验数据处理进行了探讨,对2015年北京高考理综试题中第21题的解法进行了分析,对单摆实验教学和高三复习备考有一定参考价值.

关键词:单摆;重力加速度;实验数据处理

用单摆测重力加速度是单摆周期公式的一个重要应用[1],也是高考明确要求掌握的物理实验之一,是高考考查的热点和复习备考的重点,而实验数据处理又是这个实验的重要内容,如何快速高效且误差小的处理实验数据求得重力加速度是一个值得深入讨论的问题.本文结合 4 种方案对用单摆测量重力加速度的实验数据处理进行了探讨.

1　应用多次测量求平均值的方法处理实验数据求重力加速度

根据单摆的周期公式

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{1}$$

变形可得

$$g=\frac{4\pi^2L}{T^2} \tag{2}$$

其中 L 为单摆的摆长,即悬点到小球球心的距离.不难看出,只要测量出单摆的摆长 L 和单摆的周期 T,就可以计算出重力加速度.实验选用传统的单摆实验装置,其中摆球直径为 2.00 cm.调整摆线长分别为 40 cm、50 cm、60 cm、70 cm、80 cm、90 cm、100 cm,测量 30 次全振动的时间,每组实验均测量 5 次,填入数据记录表格,如表 1 所示.计算出一次全振动时间即周期 T,填入表格.根据公式计算出相应摆长和周期测得重力加速度,最后计算重力加速度的平均值.由此可以计算出 g 的平均值

$$\overline{g}=9.767\ \mathrm{m/s^2}$$

表 1　实验数据及记录表格

摆线长 L_0/cm	30 次全振动时间 t/s					5 次测量的平均值 $\bar{t}$/s	周期 T/s	周期的平方 T^2/$\mathrm{s^2}$	摆长 L/m	重力加速度 g/($\mathrm{m\cdot s^{-2}}$)
	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次					
40.00	38.7	38.7	38.7	38.7	38.7	38.7	1.3	1.664 10	0.410 0	9.717
50.00	43.0	43.0	43.0	43.0	43.0	43.0	1.4	2.054 44	0.510 0	9.790
60.00	47.0	47.0	47.0	47.0	47.0	47.0	1.6	2.454 44	0.610 0	9.802
70.00	50.8	50.7	50.8	50.9	50.9	50.8	1.7	2.869 64	0.710 0	9.758
80.00	54.2	54.3	54.4	54.2	54.2	54.3	1.8	3.271 28	0.810 0	9.765
90.00	57.6	57.6	57.6	57.5	57.5	57.6	1.9	3.681 28	0.910 0	9.749
100.00	60.6	60.5	60.5	60.5	60.5	60.5	2.0	4.069 63	1.010 0	9.788

2　应用描点作图法处理实验数据求重力加速度

2.1　用单摆测重力加速度实验的几种可能图像的理论分析

由式(1) 变形可得

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}L \tag{3}$$

(1) 如果 L 为真实的摆长，根据式(3)，可以看出 $T^2 - L$ 图像为过原点的一条直线，如图 1 中 ① 所示，直线的斜率

$$k = \frac{4\pi^2}{g} \tag{4}$$

(2) 如果 L 为摆线的长度，则

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}\left(L + \frac{d}{2}\right)$$

即

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}L + \frac{4\pi^2}{g}\ \frac{d}{2}$$

式中 d 表示摆球的直径. 可以看出 $T^2 - L$ 图像为如图 1 中 ② 所示的一条直线，直线的斜率为式(4).

(3) 如果 L 为悬点到摆球底端的距离，则

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}\left(L - \frac{d}{2}\right)$$

即

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}L - \frac{4\pi^2}{g}\ \frac{d}{2}$$

式中 d 表示摆球的直径，可以看出 $T^2 - L$ 图像为如图 1 中 ③ 所示的一条直线，直线的斜率仍为式(4).

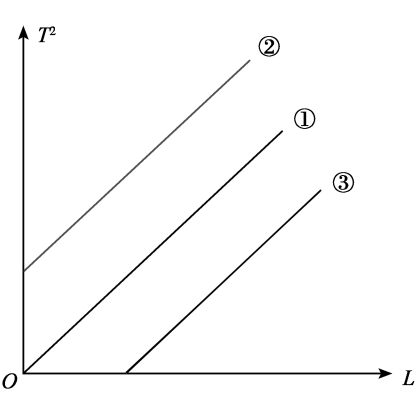

图 1　$T^2 - L$ 图像

不难看出，即使数据处理阶段选用的摆长不是真实使用的摆长，比真实摆长大一些或小一些，通过求直线的斜率 k，都可以进一步求出重力加速度

$$g = \frac{4\pi^2}{k}$$

2.2　根据采集的实验数据作图分析

(1) 提取周期的平方 T^2 和真实摆长 L 两列数据，利用 Excel 作图功能，作出 $T^2 - L$ 图像，如图 2 所示.

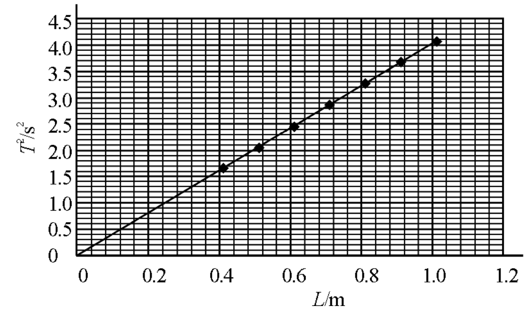

图 2　周期平方 T^2 和真实摆长 L 的实验数据处理

利用 Excel 的“显示公式” 功能，得到数学表达式：$T^2 = 4.031L + 0.004$；利用 Excel 的“显示公式” 功能，“显示 R 的平方值”，$R^2 = 0.999$，接近 1，说明拟合程度较好. 在误差允许的范围内可以认为 $T^2 - L$ 图像是过原点的一条直线，则

$$\frac{4\pi^2}{g} = 4.031\ \mathrm{s^2/m}$$

由此可以求出

$$g = 9.784\ \mathrm{m/s^2}$$

(2) 提取周期的平方 T^2 和摆线长 L 两列数据，利用 Excel 作图功能，作出 $T^2 - L$ 图像，如图 3 所示.

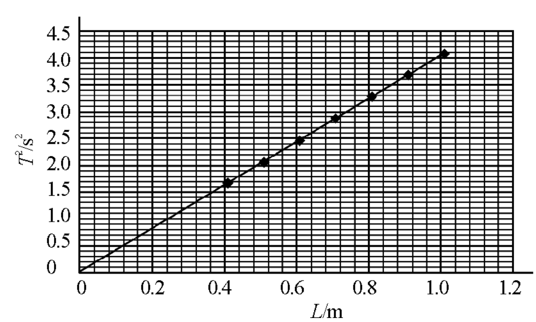

图 3　周期平方 T^2 和摆线长 L 的实验数据处理

利用 Excel 的“显示公式” 功能，得到数学表达式：$T^2 = 4.031L + 0.044$；利用 Excel 的“显示公式” 功能，“显示 R 的平方值”，$R^2 = 0.999$，接近 1，说明拟合程度较好. 可以看出 $T^2 - L$ 图像是一条直线，则

$$\frac{4\pi^2}{g} = 4.031\ \mathrm{s^2/m}$$

由此可以求出

$$g = 9.784\ \mathrm{m/s^2}$$

(3) 提取周期的平方 T^2 和摆线长加小球直径 L

两列数据,利用Excel作图功能,作出 T^2-L 图像,如图 4 所示.

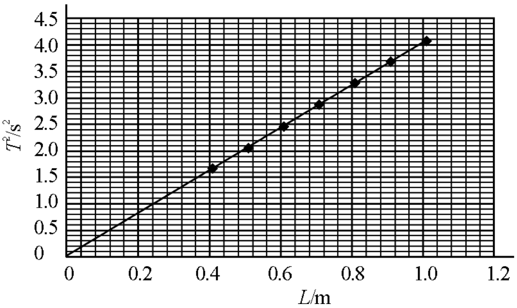

图 4 周期的平方 T^2 和摆线长加小球直径 L 的实验数据处理

利用 Excel 的“显示公式” 功能,得到数学表达式:$T^2=4.031L-0.036$;利用 Excel 的“显示公式”功能,“显示 R 的平方值”,$R^2=0.999$,接近 1,说明拟合程度较好. 可以看出 T^2-L 图像是一条直线,则

$$\frac{4\pi^2}{g}=4.031\ \mathrm{s^2/m}$$

由此可以求出

$$g=9.784\ \mathrm{m/s^2}$$

3 基于 Excel 提供的函数求重力加速度

基于 Excel 提供的函数库,将周期的平方作为因变量,真实摆长作为自变量,调用线性回归拟合方程的斜率函数 SLOPE,选中自变量和因变量两列数据的区域,可以求得线性回归拟合方程的斜率为 4.031 11;调用线性回归拟合线方程的截距函数 INTERCEPT,可以求得线性回归拟合方程的截距为 0.004 31;调用相关系数函数 CORREL,可以计算相关系数判别自变量和因变量两列数据的相关程度,求得相关系数为 0.999 97,非常接近 1,说明自变量和因变量的相关性非常好,可以进一步写出线性回归拟合方程为

$$T^2=4.031\ 1L+0.004\ 31$$

通过斜率可以求得重力加速度

$$g=9.783\ 5\ \mathrm{m/s^2}$$

同理,如果将周期的平方作为因变量,摆线长作为自变量,调用函数可以求得:斜率为 4.031 11,截距为 0.044 63,相关系数为 0.999 97,通过斜率可以求得重力加速度 $g=9.783\ 5\ \mathrm{m/s^2}$.

同理,如果将周期的平方作为因变量,摆线长加小球直径作为自变量,调用函数可以求得:斜率为 4.031 11,截距为 -0.036,相关系数为 0.999 97,通过斜率可以求得重力加速度:$g=9.783\ 5\ \mathrm{m/s^2}$.

4 类比纸带法处理数据求重力加速度

周期的平方 T^2 与摆长 L 的实验数据如表 2 所示.

表 2 周期的平方与摆长的对应关系

周期的平方 T^2	摆长 L
T_1^2	L_1
T_2^2	L_2
T_3^2	L_3
T_4^2	L_4
T_5^2	L_5
T_6^2	L_6

$$T_1^2=\frac{4\pi^2}{g}L_1 \tag{5}$$

$$T_2^2=\frac{4\pi^2}{g}L_2 \tag{6}$$

$$T_3^2=\frac{4\pi^2}{g}L_3 \tag{7}$$

$$T_4^2=\frac{4\pi^2}{g}L_4 \tag{8}$$

$$T_5^2=\frac{4\pi^2}{g}L_5 \tag{9}$$

$$T_6^2=\frac{4\pi^2}{g}L_6 \tag{10}$$

由式(5)、(8) 可得

$$T_4^2-T_1^2=\frac{4\pi^2}{g}g_1(L_4-L_1)$$

整理可得

$$g_1=\frac{4\pi^2(L_4-L_1)}{T_4^2-T_1^2} \tag{11}$$

由式(6)、(9) 可得

$$T_5^2-T_2^2=\frac{4\pi^2}{g_2}(L_5-L_2)$$

整理可得

$$g_2=\frac{4\pi^2(L_5-L_2)}{T_5^2-T_2^2} \tag{12}$$

由式(7)、(10) 可得

$$T_6^2-T_3^2=\frac{4\pi^2}{g}(L_6-L_3)$$

整理可得

$$g_3=\frac{4\pi^2(L_6-L_3)}{T_6^2-T_3^2} \tag{13}$$

由式(11)～(13)可得

$$\bar{g}=\frac{g_1+g_2+g_3}{3}$$

将实验采集的前 6 组数据代入,计算可得

$$\bar{g}=9.727\ \mathrm{m/s^2}$$

5　实验结果分析

4 种方案的误差分析如表 3 所示.

表 3　4 种方案的误差分析

方案	$g_{测}$ /(m·s^{-2})	相对误差 δ/%
方案一	9.767	0.352
方案二	9.784	0.179
方案三	9.784	0.179
方案四	9.727	0.760

方案一是应用多次测量求平均值的方法处理实验数据,实验测量值为 9.767 m/s^2;方案二是应用描点作图法处理实验数据,实验的测量值为 9.784 m/s^2;方案三是基于 Excel 提供的函数求解线性回归拟合方程的系数处理实验数据,实验的测量值为 9.784 m/s^2;方案四是采用逐差法处理数据,实验的测量值为 9.727 m/s^2;经查阅北京地区的重力加速度 g 的标准数值为 9.801 51 m/s^2,根据公式可以求得 4 种方案实验测量结果的相对误差分别为 0.352%、0.179%、0.179%、0.760%.不难看出,方案二和方案三的相对误差较小,并且两种方案的相对误差相同;方案一和方案四的相对误差也不大,中学阶段采用这 4 种方案处理数据都可以满足实验的要求.

6　考题分析

【例题】(2015 年高考北京理综第 21 题)用单摆测定重力加速度的实验装置如图 5 所示.

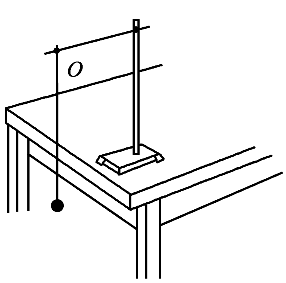

图 5　试题情境图

(1)组装单摆时,应在下列器材中选用______(选填选项前的字母).

A.长度为 1 m 左右的细线

B.长度为 30 cm 左右的细线

C.直径为 1.8 cm 的塑料球

D.直径为 1.8 cm 的铁球

(2)测出悬点 O 到小球球心的距离(摆长)L 及单摆完成 n 次全振动所用的时间 t,则重力加速度 $g=$______(用 L、n、t 表示).

(3)表 4 是某同学记录的 3 组实验数据,并做了部分计算处理.

表 4　数据记录

组次	1	2	3
摆长 L/cm	80.00	90.00	100.00
50 次全振动所用的时间 t/s	90.0	95.5	100.5
振动周期 T/s	1.80	1.91	
重力加速度 g/(m·s^{-2})	9.74	9.73	

请计算出第 3 组实验中的 $T=$______s,$g=$______m/s^2.

(4)用多组实验数据作出 T^2-L 图像,也可以求出重力加速度 g.已知 3 位同学做出的 T^2-L 图线的示意图如图 6 中的 a、b、c 所示,其中 a 和 b 平行,b 和 c 都过原点,图线 b 对应的 g 值最接近当地重力加速度的值.则相对于图 6 中的图线 b,下列分析正确的是______(选填选项前的字母).

A.出现图线 a 的原因可能是误将悬点到小球下端的距离记为摆长 L

B.出现图线 c 的原因可能是误将 49 次全振动记为 50 次

C.图线 c 对应的 g 值小于图线 b 对应的 g 值

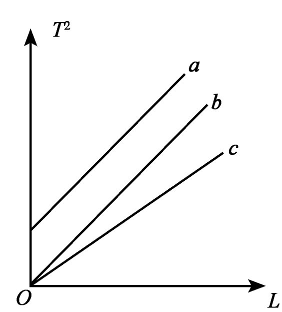

图 6　数据处理分析

(5) 某同学在家里测重力加速度. 他找到细线和铁锁,制成一个单摆,如图 7 所示. 由于家里只有一根量程为 30 cm 的刻度尺,于是他在细线上的 A 点做了一个标记,使得悬点 O 到 A 点间的细线长度小于刻度尺量程. 保持该标记以下的细线长度不变,通过改变 O、A 间细线长度以改变摆长. 实验中,当 O、A 间细线的长度分别为 L_1、L_2 时,测得相应单摆的周期为 T_1、T_2. 由此可得当地的重力加速度 $g=$________(用 L_1、L_2、T_1、T_2 表示).

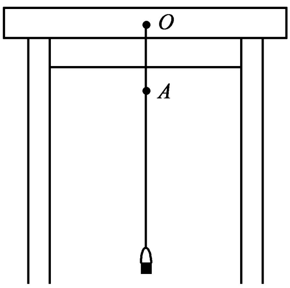

图 7　试题情境图

解析:(1) 考查器材选取,正确选项为 A 和 D.

(2) 考查实验原理,由单摆的周期公式式(1) 及所测周期 $T=\frac{t}{n}$,整理可得

$$g=\frac{4\pi^2 n^2 L}{t^2}$$

(3) 考查数据处理,根据表格信息可知第 3 次实验中 50 次全振动所用的时间为 100.5 s,不难计算出对应 1 次全振动所用的时间,即周期 $T=2.01$ s,代入式(2),计算可得

$$g=9.76\ \mathrm{m/s^2}$$

(4) 考查误差分析,如果误将悬点到摆球底端的距离记为摆长,则

$$T^2=\frac{4\pi^2}{g}\left(L-\frac{d}{2}\right)$$

即

$$T^2=\frac{4\pi^2}{g}L-\frac{2\pi^2 d}{g}$$

其中 d 表示摆球的直径,可以看出 T^2-L 图像为一条直线,且图线应与纵轴有一个负截距,而图线 a 与纵轴有正截距,故选项 A 错误;如果误将 49 次全振动记为 50 次,则测得的单摆周期变小,由式(2) 可以看出,g 值偏大,而 T^2-L 图像的斜率满足式(4),可以判断出斜率 k 偏小,故选项 B 正确;T^2-L 图像的斜率满足式(4),由图可知图线 c 的斜率小于图线 b 的斜率,则图线 c 对应的 g 值大于图线 b 对应的 g 值,故选项 C 错误.

(5) 考查数据处理,可以采用如下两种方法分析.

假设 A 点与铁锁重心之间的距离为 L_0.

方法 1:采用计算方法分析

根据 L_1 和 T_1 这组数据可得

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{L_1+L_0}{g}} \tag{14}$$

根据 L_2 和 T_2 这组数据可得

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{L_2+L_0}{g}} \tag{15}$$

将式(14) 两边平方后可得

$$T_1^2=\frac{4\pi^2}{g}(L_1+L_0) \tag{16}$$

将式(15) 两边平方后可得

$$T_2^2=\frac{4\pi^2}{g}(L_2+L_0) \tag{17}$$

式(16) 与(17) 两边作差可得

$$g=\frac{4\pi^2(L_2-L_1)}{T_2^2-T_1^2}$$

方法 2:应用图像法处理数据的思想分析

不难得出

$$g=\frac{4\pi^2}{T^2}(L+L_0)$$

即

$$T^2=\frac{4\pi^2}{g}L+\frac{4\pi^2}{g}L_0$$

作出 T^2-L 图像为一条直线,其斜率为式(4),根据 (L_1,T_1^2) 和 (L_2,T_2^2) 两点可以求斜率

$$k=\frac{T_2^2-T_1^2}{L_2-L_1} \tag{18}$$

将式(4)、(18) 联立可以得出

$$g=\frac{4\pi^2(L_2-L_1)}{T_2^2-T_1^2}$$

参 考 文 献

[1]　人民教育出版社,课程教材研究所,物理课程教材研究开发中心. 普通高中教科书物理选择性必修第一册[M]. 北京:人民教育出版社,2020.