

球和球壳组合模型电势差的求解及结果分析

张 勇

(武汉晴川学院公共课部 湖北 武汉 430204)

(收稿日期:2022-06-08)

摘 要:从静电平衡的角度,利用均匀带电球面内外电势的结论及电势叠加原理,求解了两种情况下导体球和球壳组合模型的电势差并分析了电势差发生改变的原因,对理解电势差的内涵及求解球形电容器的电容具有重要意义.

关键词:电势差;导体球;球壳;静电平衡

导体球和球壳组合模型电势差的求解,是一类非常典型而且重要的问题.它不仅仅是静电平衡的重要应用,而且是后续求解球形电容器电容的关键.有教材^[1]讨论过这类问题的电势,但没有涉及电势差,而且是利用电势与场强的积分关系求解,过程较为复杂;也有教材^[2]讨论到电势差的求解,但没有讨论内球体接地的情况.本文重点讨论内球体接地的情况,并分析此情况电势差发生改变的原因.

1 球和球壳组合模型电势差的求解

在电容器家族中,有一种电容器被称为球形电容器,它是由带等量异号电荷的导体球和球壳组合而成.求解球形电容器的电容表达式对理解其内涵具有重要意义.而根据 $C = \frac{Q}{U}$ 知,求解电势差 U 成为求解 C 的关键.因此,下面分 2 种情况来求解电势差,并且指出 2 种情况下电势差变化的原因.

1.1 最初内球体和外球壳均带电

内球体和外球壳均带电是所有组合模型中最普遍也是最复杂的情形,正是由于它的普遍性,所以我们重点要讨论此情形,下面举例说明.

【例 1】半径为 R_1 的金属球和半径分别为 R_2 和 R_3 的金属球壳同心($R_1 < R_2 < R_3$),且带电荷量分别为 q 和 Q ,达到静电平衡后,求以下 4 种情形中,内球体电势、外球壳电势及内外导体间电势差:

- (1) 不作任何处理;
- (2) 将外球壳接地;
- (3) 将内球体接地;
- (4) 将外球壳接地后断开,再将内球体接地.

解:选无穷远处为电势零点,用电势的定义

$$V_A = \int_A^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

可得半径为 R 的均匀带电球面内外的电势为

$$V_{\text{内}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (r < R) \quad (1)$$

$$V_{\text{外}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r > R) \quad (2)$$

其中 r 为球面中心到所求电势点的距离.

(1) 达到静电平衡后,内球体电荷 q 均匀分布在外表面,球壳内外表面电荷分别为 $-q$ 和 $Q+q$.内球体等效为带电荷量为 q 的 1 个球面,外球壳等效为 2 个带电荷量分别为 $-q$ 和 $Q+q$ 的球面.根据电势叠加原理,球体内某一点 A 处(距离球心的距离为 r)的电势应等于 3 个带电球面在 A 处电势的叠加,即

$$V_A = V_{+q} + V_{-q} + V_{q+Q} = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

由表达式可知,球体内某一点 A 处的电势与该点到球心的距离 r 无关,也就是说内球体是一等势体

$$V_{\text{内球}} = V_A$$

同理可得,外球壳电势为

$$V_{\text{外壳}} = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

内外导体间电势差为

$$U_{\text{内外}} = V_{\text{内球}} - V_{\text{外壳}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

(2) 外球壳接地后,其电势变为零,即 $V_{\text{外壳}} = 0$,外球壳外表面的正电荷 $q+Q$ 被大地的电子中和,内表面电荷仍然为 $-q$; 此时内球体电荷保持 q 不变,且仍然是一等势体,其电势为半径为 R_1 和 R_2 两带电球面在该处电势的叠加,利用电势,即

$$V_{\text{内球}} = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

此时内外导体间电势差为

$$U_{\text{内外}} = V_{\text{内球}} - V_{\text{外壳}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

(3) 内球体接地后,其电势变为零,即 $V_{\text{内球}} = 0$; 先判断内球体是否带电: 设此时内球体电荷为零,外球壳内表面电荷为 x , 则外球壳外表面电荷为 $Q-x$, 由 $V_{\text{内球}} = 0$ 可得

$$V_{\text{内球}} = \frac{x}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q-x}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

方程无解,说明内球体不可能电荷为零; 设此时内球体电荷为 q' , 分布在球体表面, 由于静电感应, 球壳内表面电荷为 $-q'$, 球壳外表面电荷为 $q'+Q$. 由 $V_{\text{内球}} = 0$, 即

$$V_{\text{内球}} = \frac{+q'}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q'}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q'+Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 0$$

可得

$$q' = -\frac{Q}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) R_3} \quad (3)$$

外球壳电势为

$$V_{\text{外壳}} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{-q'}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q'+Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

结合 q' 表达式可得

$$V_{\text{外壳}} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

此时内外导体间电势差为

$$U_{\text{内外}} = V_{\text{内球}} - V_{\text{外壳}} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

(4) 外球壳接地后断开, 外球壳外表面的正电荷 $q+Q$ 被大地的电子中和, 则球壳的净电荷为 $-q$,

这是与第(3)种情况不一样的地方. 此时再将内球体接地, 跟第(3)种情况中一样, 内球体电势为零, 但电荷不为零. 不妨设此时内球体电荷为 q'' , 分布在球体表面, 由于静电感应, 球壳内表面电荷为 $-q''$, 球壳外表面电荷为 $-q+q''$. 由 $V_{\text{内球}} = 0$, 即

$$\frac{+q''}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q''}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q''-q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 0$$

得

$$q'' = \frac{q}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) R_3}$$

则外球壳电势为

$$V_{\text{外壳}} = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{-q''}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q''-q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

结合 q'' 表达式可得

$$V_{\text{外壳}} = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

此时内外导体间电势差为

$$U_{\text{内外}} = V_{\text{内球}} - V_{\text{外壳}} = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

1.2 最初仅内球体带电或仅外球壳带电

内球体和外球壳仅仅其中一个带电这种情况, 是一种特殊情况, 是对第一种情况的拓展, 但又不同于第一种情况. 由于静电感应会影响电荷的分布, 所以达到静电平衡后, 内外导体上的电荷分布会不同于第一种情况, 因此内外导体间电势差也会有很大差别, 下面分别举例说明, 求出电势差, 并且指出电势差改变的原因.

【例 2】若例 1 中其他的条件不变, 把“带电荷量分别为 q 和 Q ”, 改为“带电荷量分别为 q 和零”, 则 4 种情况结果又如何?

解: 第(1)、(2)两种情况的求解过程与例 1 类似, 在此不作讨论.

(3) 内球体接地后, 内球体电势与大地电势相等, 即 $V_{\text{内球}} = 0$; 假设此时内球体剩余电荷为 q' , 分布在球体表面, 由于静电感应, 球壳内表面电荷为 $-q'$, 球壳外表面电荷为 $+q'$. 由 $V_{\text{内球}} = 0$, 即

$$V_{\text{内球}} = \frac{+q'}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q'}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 0$$

可得 $q' = 0$; 此时内球和外球壳均不带电, 电势均为零, 电势差也为零.

(4) 外球壳接地后断开, 外球壳外表面的正电荷 q 被大地的电子中和, 则球壳的净电荷为 $-q$, 这与例 2 的第(4)问球壳接地后球壳的净电荷是相同的, 其他的结果也一样。

【例 3】若例 1 中其他的条件不变, 把“带电荷量分别为 q 和 Q ”, 改为“带电荷量分别为零和 Q ”, 则 4 种情况结果又如何?

解:(1) 外球壳的电荷分布在外表面, 整个外球壳内部都是等势体, 所以

$$V_{\text{内球}} = V_{\text{外球}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

内外电势差为零。

(2) 外球壳接地后, 内外球壳的电荷均为零, 故 $V_{\text{内球}} = V_{\text{外球}} = 0$, 电势差也为零。

(3) 内球体接地后, 内球体电势与大地电势相等, 即 $V_{\text{内球}} = 0$; 若此时假设内球体所带电荷为 q' , 分布在球体表面, 由于静电感应, 球壳内表面感应电荷为 $-q'$, 球壳外表面电荷为 $+q' + Q$, 由 $V_{\text{内球}} = 0$, 即

$$\frac{+q'}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q'}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q' + Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 0$$

可得

$$q' = -\frac{Q}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)R_3} \quad (4)$$

此结果与例 1 第(3)问结果相同, 故内外电势差等结果也相同。

(4) 外球壳接地后, 球壳电势为零, 则电荷全部流入大地, 再将内球接地, 内球体电势也为零, 故内外导体电势差也为零。

2 球和球壳组合模型电势差的结果分析

2.1 为何内球接地 电势差要改变

由电势差的定义

$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

知, 球与球壳的电势差

$$U_{\text{内外}} = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

由此可见, 电势差仅与 R_1 和 R_2 两球面间的电场强度 \mathbf{E} 有关; 而由静电场的高斯定理可知两球面间的电场强度仅仅与高斯面内的电荷有关, 即

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

其中 q 为高斯面内带电体(即内球体)所带的电荷量。例 1 中内球体的电荷量由(1)、(2)两种情况的 q 变成了(3)、(4)两种情况中的 q' 和 q'' , 所以 R_1 和 R_2 两球面间的电场强度就由(1)、(2)中的

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

变成了(3)、(4)中的

$$\mathbf{E} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{E} = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

同理例 2 和例 3 中只要内球体电荷量改变, 电势差就会随之改变。内球接地直接导致内球体的电荷分布发生了改变, 从而影响了内球体电荷量的改变。因此, 内球体接地是导致电势差变化的直接原因, 而球面间电场强度的改变是导致电势差改变的根本原因。

2.2 为何内球接地 内球体的电荷量不一定变为零

从讨论中得知, 例 1 和例 3 中情况(3)内球体接地后, 内球体仍然有电荷, 内外导体之间仍然有电势差, 而例 2 中情况(3)内球体接地后, 内球体不带电, 内外球之间电势差为零。

原因可以从两方面来分析: 一方面从例 1 和例 3 中情况(3)的 q' 表达式来看, 表达式与外球壳初始时刻的电荷量 Q 有关。当 $Q=0$ 时, q' 也等于零, 而例 2 中情况(3)已知 $Q=0$, 所以 $q'=0$ 。也就是说, 内球体接地后自身电荷量是否变为零取决于外球壳初始时刻是否带电。另一方面, 也可以从反证法思路着手来解释这个问题。例 1 和例 3 的情况(3)内球体接地后, 假设其电荷量立即变为零, 由于外球壳依然有电荷, 必然会在内球体内激发电势, 这与内球体接地后电势为零是矛盾的。由此得知, 此时内球体必然带电。而例 2 中情况(3)就不存在这个问题, 因为初始时刻外球壳电荷量为零。

参考文献

- [1] 马文蔚. 物理学(上册)[M]. 6 版. 北京: 高等教育出版社, 2014: 213-214.
- [2] 程守洙. 普通物理学(上册)[M]. 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2016: 300.