

# 讲好量子力学绪论课从 Planck 公式推证开始\*

王美玉 邸冰 白彦魁

(河北师范大学物理学院 河北石家庄 050024)

(收稿日期:2022-06-15)

**摘要:**从量子力学绪论课的开端——黑体辐射入手,在普朗克能量量子化假说,引入普朗克常数基础上,结合完善的热力学统计物理学理论,对 Planck 辐射公式进行了简单、清晰的推证.拨开迷雾,从源头开始,阐明 Planck 辐射定律及其物理背景,使学生明白量子论的产生不是凭空的,是解决经典物理学中所存在的矛盾的必然性结果,从而能够帮助学生更好地理解量子力学,使得量子力学及相关课程教学效果得到很好的提升.

**关键词:**黑体辐射;量子化假说;Planck 公式

量子力学是描写微观物质运动规律的理论<sup>[1-2]</sup>,是物理学专业的重要专业基础理论课程.作为现代物理学的理论基础,量子力学已经渗入到物理学和科学技术的很多领域,深刻影响着人类社会的物质生活.量子信息学就是近些年迅速发展起来的一门新兴前沿学科<sup>[3-4]</sup>,其核心思想是运用量子力学基本原理进行信息编码、通信和计算处理.我们知道,自20世纪20年代量子力学建立到现在,人们对其中基本问题的争论从来没有停止过,经历了无数实践的检验.20世纪80年代兴起的量子信息学,利用量子力学的奇妙特性,在提高运算速度,保证信息安全,扩大信息容量,增强检测精度,实现不能破译,不能窃听的保密通信等方面突破现有的经典信息系统的极限,引起信息技术的革命.尤其是近年来在理论和实验上取得的很多重大突破性进展,反过来又极大丰富了量子理论本身的内容,深化了量子力学基本原理的内涵,并进一步验证了量子论的科学性.因此量子信息学和量子力学是相辅相成的、相互促进的.目前国内许多高校都对研究生开设了“量子信息学导论”,甚至一些高校在对本科生开设“量子力学”课程时,从一开始就揉和了量子信息学的基本概念.对于量子力学的讲授,其绪论——量子力学的建立和发展史,是必不可少的.由于量子

力学不同于经典物理,它有自己独特而全新的理论框架体系,其基本概念和原理使初学者本身就感到很困惑.因此开篇第一课直接从量子力学五大基本假设开始,如波函数、薛定谔方程、厄米算符等,学生往往会被搞得一头雾水.量子力学的创始人之一,丹麦著名物理学家玻尔(Bohr)曾风趣地说过:“如果谁没被量子力学搞得头晕目眩,那他就一定没有真正理解量子力学.”因此,拨开迷雾,从源头开始,阐明量子力学产生的实验基础和历史背景,使学生明白量子论的产生不是凭空的,是解决经典物理学中所存在的矛盾的必然性结果,教学效果会得到很好的提升.

量子力学的开端是黑体辐射.我们知道所有物体都具有不断吸收和辐射电磁波的本领.物体辐射出去的电磁波在各个波段是不同的,也就是具有一定的谱分布.这种谱分布与物体本身的特性及其温度有关,因而被称为热辐射.1859年,德国物理学家基尔霍夫(Kirchhoff)定量地研究了物体对光的吸收和辐射效应,发现在同一温度下,任何物体辐射光与吸收光的能力之比是一常数,这一比值只与物体自身的温度和光的波长或频率有关,而与物质材料及结构无关.随后,基尔霍夫引入了黑体的概念.所谓黑体,是指在任何温度下都能全部吸收到达其上

\* 河北师范大学教学改革研究资助项目,项目编号:2022XJJG008,2022XJJG065,2020XJJG107.

通讯作者:白彦魁(1977-),男,教授,主要从事热力学统计物理教学和量子信息研究工作.

的一切辐射,即它的吸收本领等于1.可见黑体的吸收能力达到了最大,那么我们关注的就是黑体辐射规律了.

## 1 黑体辐射公式

1896年,德国物理学家维恩(Wien)从热力学出发,总结实验数据,得到了一个辐射能量分布的半经验公式

$$E(\nu) d\nu = a\nu^3 e^{-\frac{b\nu}{T}} d\nu \quad (1)$$

这里, $E(\nu) d\nu$ 表示温度为 $T$ 时黑体内频率在 $\nu \sim \nu + d\nu$ 之间的辐射能量密度, $a, b$ 是两个参数.但这个公式只在短波部分与实验结果符合.

1900年,英国物理学家瑞利(Rayleigh)根据经典电动力学和统计物理理论得到了黑体辐射公式,后来由美国物理学家金斯(Jeans)在1905年进行了修正,即瑞利-金斯公式

$$E(\nu) d\nu = \frac{8\pi kT\nu^2}{c^3} d\nu \quad (2)$$

其中, $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ 是玻尔兹曼常数, $c$ 是光速.如图1所示<sup>[5]</sup>,这个公式与维恩公式恰好相反,在长波部分与实验值符合较好.但是随着频率 $\nu$ 增大,辐射能量密度会无止境地增加,这完全不符合黑体辐射的真实情况,历史上称为“紫外灾难”.

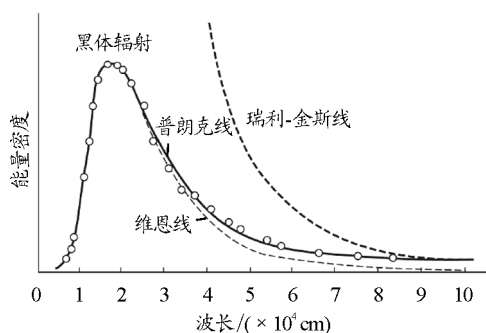


图1 3种黑体辐射能量分布曲线与实验值比较

维恩公式和瑞利-金斯公式都是用经典物理学的方法来研究热辐射所得的结果,都与实验结果不完全符合,明显暴露了经典物理学的缺陷,黑体辐射是物理学晴朗天空中一朵令人不安的乌云.

为了解决上述困难,德国物理学家普朗克(Planck)经过缜密思考,兼顾维恩公式和瑞利-金斯公式,利用数学上的内插法,巧妙地把两个公式融

合在一起,于1900年10月在德国物理学会上给出了强行拼凑出来的黑体辐射公式

$$E(\nu) d\nu = \frac{\alpha\nu^3}{e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1} d\nu \quad (3)$$

这里 $\alpha, \beta$ 是两个参数.图1给出了3种黑体辐射能量分布曲线与实验值比较,显然普朗克定律与实验结果符合得很好.由式(3)可知,在高频区, $e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1 \approx e^{\frac{\beta\nu}{T}}$ ,这正好就是维恩公式;在低频区, $e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1 \approx \frac{\beta\nu}{T}$ ,

若取 $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{8\pi k}{c^3}$ ,就得到了瑞利-金斯公式,由此可见普朗克公式有多精妙.关于普朗克内插法的详细过程,可以参见文献[6].

一般情况下,物理学家是先做出一些假设,然后在物理意义上推演出理论和公式,而普朗克反其道而行之,根据实验数据用数学技巧先凑出了公式.既然普朗克公式严格符合实验数据,仅靠猜测实在难以服众,接下来的两个月,他全心全意寻找理论上完善的推导方法.1900年12月14日普朗克在柏林物理学会上发表论文《论正常光谱的能量分布定律的理论》,提出了能量量子化假说,给出了普朗克公式的推导,这一天就作为量子物理诞生日.

普朗克辐射定律如此完美,但是几乎所有的量子力学或者量子信息学教材,或由于篇幅原因或由于原始文献给出的推导比较复杂,只简略给出了普朗克黑体辐射公式表达式.后来也有文献曾经专门研究过普朗克辐射定律的推导,推导方法各有特色,比较典型的有文献[7-8].对于黑体辐射这部分课堂教学,教师一般也只是按照教材介绍普朗克公式建立依据的量子化假说,然后直接给出公式结果.对于大学生或者研究生来讲,只记住公式,知其然不知其所以然显然是不够的.事实上,公式的推导在物理尤其是理论物理的学习过程中是非常重要的.作为物理教师应该跳出原有教材框架,对教材内容进行深入的学习研究,通过课堂上对该公式的推导这一过程,引领学生经历物理学家研究的过程,认识到科学的本质,领会科学研究方法,养成逻辑分析思维习惯,从而能更好地培养学生的物理科学素养,帮助学生形成正确的科学态度、科学世界观和价值观.

## 2 普朗克辐射定律推证

为了能推导出与实验数据严格契合的普朗克辐射定律,普朗克经过深入研究后,创造性地提出了能量量子化假说:

(1) 黑体空腔器壁上的原子可以看成线性谐振子,谐振子按能量分布的概率服从玻尔兹曼分布.

(2) 谐振子吸收和辐射电磁波时,能量是分立的,即  $\epsilon = nh\nu$ ,  $n = 1, 2, \dots$  为正整数. 基本的能量单元  $h\nu$  叫做量子,  $h$  是普朗克常量.

在能量量子化假设基础上,接下来我们给出一个相对简单、清晰的普朗克辐射定律的推导方法. 主要包括两步.

### (1) 计算谐振子平均能量

对于玻尔兹曼分布,处在能量为  $\epsilon_s$  的量子态  $s$  上的平均粒子数为<sup>[9]</sup>

$$f_s = e^{-\alpha - \beta \epsilon_s} \quad (4)$$

则系统的粒子数  $N$  和能量  $E$  可以表示为

$$N = \sum_s e^{-\alpha - \beta \epsilon_s} \quad E = \sum_s \epsilon_s e^{-\alpha - \beta \epsilon_s} \quad (5)$$

这里的  $\sum_s$  是对所有量子态求和,则每一个量子态下谐振子的平均能量为

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_n nh\nu e^{-\alpha - \beta \epsilon_n}}{\sum_n e^{-\alpha - \beta \epsilon_n}} = \frac{\sum_n nh\nu e^{-\beta \epsilon_n}}{\sum_n e^{-\beta \epsilon_n}} = \frac{\sum_n nh\nu e^{-\beta n h\nu}}{\sum_n e^{-\beta n h\nu}} \quad (6)$$

借助于

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (7)$$

式(6)分母部分变为

$$\sum_n e^{-\beta n h\nu} = \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}} \quad (8)$$

对式(7)两边求导数,左边

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}$$

右边

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

因此式(6)的分子部分变为

$$\sum_n nh\nu e^{-\beta n h\nu} = h\nu e^{-\beta h\nu} \sum_{n=0}^{\infty} n (e^{-\beta h\nu})^{n-1} = \frac{h\nu e^{-\beta h\nu}}{(1 - e^{-\beta h\nu})^2} \quad (9)$$

将式(8)和式(9)代入式(6),可得谐振子的平均能量为

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_n nh\nu e^{-\beta n h\nu}}{\sum_n e^{-\beta n h\nu}} = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad (10)$$

(2) 计算单位体积内,  $\nu \sim \nu + d\nu$  范围内微量子态数

在《热力学·统计物理学》中曾经给出<sup>[9]</sup>,在体积  $V$  内,  $p_x \sim p_x + dp_x$ ,  $p_y \sim p_y + dp_y$ ,  $p_z \sim p_z + dp_z$  内粒子的量子态数为

$$dn_x dn_y dn_z = \frac{V}{h^3} dp_x dp_y dp_z \quad (11)$$

换成动量空间的球坐标  $p, \theta, \varphi$  来描写动量,  $p, \theta, \varphi$  与  $p_x, p_y, p_z$  的关系为

$$\begin{aligned} p_x &= p \sin \theta \cos \varphi \\ p_y &= p \sin \theta \sin \varphi \\ p_z &= p \cos \theta \end{aligned} \quad (12)$$

根据积分变量替换公式,在体积  $V$  内,  $p \sim p + dp$ ,  $\theta \sim \theta + d\theta$ ,  $\varphi \sim \varphi + d\varphi$  范围内粒子的量子态数为

$$\Omega = \frac{V}{h^3} p^2 \sin \theta dp d\theta d\varphi \quad (13)$$

再对  $\theta, \varphi$  积分,即

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi$$

可得在体积  $V$  内,动量大小在  $p \sim p + dp$  范围内,粒子的量子态数为

$$\Omega = \frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp \quad (14)$$

微观粒子具有波粒二象性,根据德布罗意关系及爱因斯坦质能方程可得  $p$  与  $\nu$  的关系,即  $p = \frac{h\nu}{c}$ , 将其代入式(14),并考虑到光波矢量  $\mathbf{k}$  有两个可能的方向,容易得到在单位体积内,在  $\nu \sim \nu + d\nu$  范围内微量子态数为

$$2 \cdot \frac{4\pi}{h^3} \frac{h^2 \nu^2}{c^2} \frac{h}{c} d\nu = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} d\nu \quad (15)$$

将式(10)和式(15)相乘,并利用  $\beta = \frac{1}{kT}$  得到温度为

$T$ 时,黑体在频率 $\nu \sim \nu + d\nu$ 范围内单位体积内的辐射能量为

$$E(\nu) d\nu = \bar{\epsilon} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu \quad (16)$$

至此,我们推导出了教材中给出的普朗克辐射定律的表达式.

### 3 普朗克常量 $h$ 的重要性

普朗克在研究黑体辐射时首次引进了一个常量  $h$ ,划开了经典物理学与量子物理学的分界线,从此这个神奇的自然常量贯穿了整个量子论诞生和发展历史.1905年爱因斯坦拓展了普朗克的量子论,提出了光量子假说,给出了光电效应方程

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + W$$

成功解释了光电效应现象,向人类揭示出光具有波粒二象性.这是量子论发展史上第二次出现了普朗克常量  $h$ .1913年玻尔提出了定态假设和跃迁假设  $h\nu = E_n - E_m$ ,用量子论原子模型解决了原子的稳定性和氢原子光谱的分立问题.继普朗克、爱因斯坦、玻尔之后,法国物理学家德布罗意(de Broglie)于1924年提出了物质波假说,即一个动量为  $p$ 、能量为  $E$  的自由运动的粒子,其呈现的物质波的频率和波长为

$$\nu = \frac{E}{h} \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

联系物质的波动性和粒子性的恰恰还是普朗克常量  $h$ ,从此量子力学建立了.由于微观粒子具有波粒二象性,其坐标和动量不能同时具有确定值,这就是德国物理学家海森堡(Heisenberg)在1927年提出的不确定性原理,即

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

不确定度原理是量子力学的一条基本原理,量子力学证明,只要两个表示微观粒子力学量的算符不对易,则两个算符对应的力学量不能同时具有确定值.在量子力学两种典型的描述方式,海森堡的矩阵力学和薛定谔(Schrödinger)的波动力学

中,都引入了  $h$ .纵观整个量子力学建立过程,可见普朗克常量  $h$  具有重要意义,它是现代物理学的基石与灵魂.

### 4 结束语

量子力学的产生和发展,使我们对客观世界的认识从宏观深入到微观.讲好量子力学的绪论课,对于我们如何学习和研究物理,建立创新性的思维方法都具有重要的启发性.量子力学的开端,黑体辐射公式的引入更具有非凡的意义.普朗克在提出能量量子化假说、引入普朗克常量基础上,利用完善的热力学统计物理学理论,详细推证出与实验严格符合的黑体辐射公式,开创了物理学的新纪元.因此给出普朗克辐射定律的推证,不仅弥补了教材上只有结论、没有研究过程的遗憾,而且使学生能够进一步理解普朗克辐射定律及其物理背景,深刻感受物理学家的实际创造过程和领会其研究思想,从而有利于促进学生形成严谨科学的物理思维,激发学生对更深奥的物理理论的探究热情,也为教师课程教学研究提供了有益的启示.

### 参考文献

- [1] 曾谨言. 量子力学[M]. 4版. 北京:科学出版社,2007.
- [2] 周世勋. 量子力学教程[M]. 2版. 北京:高等教育出版社,2009.
- [3] 迈克尔 A. 尼尔森,艾萨克 L. 庄. 量子计算与量子信息(10周年版)[M]. 孙晓明,尚云,李绿周,等译. 北京:电子工业出版社,2022.
- [4] 尹浩,韩阳等. 量子通信技术与原理[M]. 北京:电子工业出版社,2013.
- [5] 徐美. 对普朗克公式的再认识[J]. 物理与工程,2018, 28(1): 62-65.
- [6] 吴思远,王笑君. 普朗克内插法的详细过程[J]. 物理通报,2019(3):5~7.
- [7] 张维善. 普朗克黑体辐射公式是如何得出的?[J]. 物理教学探讨,2012(1):1~3.
- [8] 邓崇林. 以量纲分析重新发现普朗克公式[J]. 物理与工程,2019,29(3): 8-18.
- [9] 汪志诚. 热力学·统计物理[M]. 6版. 北京:高等教育出版社,2019.