叠砖最大悬出距离的新型解法及应用

鲍四元　宋丹丹　沈　峰
(苏州科技大学土木工程学院　江苏 苏州　215011)

(收稿日期:2022－06－26)

摘　要:首先分别给出四叠砖的两类叠放方式——4层叠放与3层叠放.区别于常规的力矩平衡方法,所提方法中把顶层砖重量等效为2个质点重量,然后采用临界平衡状态下重心位置的关系得到叠砖悬出距离的表达式,并求出悬出距离的最大值.基于同样的思路,研究五叠砖在若干叠放方式下的最大悬出距离.为叠砖悬出距离问题提出基于重心概念的新型解法.

关键词:叠砖问题;伸出距离;重心

1　引言

相同的砖头在桌面边缘堆叠,能悬出桌面的最大距离和堆放方式有关.文献[1]利用重心位置的关系与力矩平衡的方法研究了四叠砖的最大悬出距离问题.近年来,重心在很多结构或力学问题中得到应用.文献[2]研究了浮式结构重心高度对结构水动力性能的影响.文献[3]研究3根火柴吊8瓶矿泉水的现象,并用重心做了合理的解释.文献[4]利用重心的积分公式研究了悬链线的重心问题.

关于五叠砖悬出距离的研究文献很少.本文将利用重心位置分别对四叠砖、五叠砖的最大悬出问题进行讨论.所提方法具有易于分析和列式的特点.

近些年随着科学技术的发展,各种计算软件在国内得到了广泛的应用,其中Mathematica是最受国内外广大研究人员欢迎的计算软件之一[5-6],它可以完美地与数学、力学、化学、工程等领域的科研及教育相结合[7-8],显著提高工作效率.由于本文研究的力学模型较为复杂、重心公式比较繁琐,充分利用Mathematica软件可简单快捷地求得计算结果.

2　四叠砖问题

为简便计算,设砖头的长度为1,重量为1,悬出距离为s.将四叠砖的叠放分为两类,4层叠放与3层叠放方式.以下是对两种方式的探讨.

2.1　4层叠放

第一类称4层叠放方式,4层叠放方式为了使砖头不倒塌,要求4叠砖重心的水平坐标必须在桌面范围以内,每一层砖头上面所有砖头的重心必须在该层砖头内[9-10].关于这种堆叠方式,文献[1]已经给出具体叠放方式与算式,得出最大悬出距离是砖头长度的$\frac{25}{24}$倍.

2.2　3层叠放

第二类称3层叠放方式,如图1所示,假设砖1位于底部,中间为砖2、砖3,最上层为砖4.如图2所示,砖1右边缘与桌面边缘的距离为a,砖1右边缘与砖3的右边缘距离为b,砖2右边缘与砖3左边缘距离为c,砖1右边缘记为O_1点,砖2左边缘记为O_2点,砖3右边缘记为O_3点.

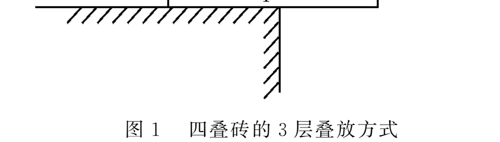

图1　四叠砖的3层叠放方式

将砖4的重力等效为作用在砖2右边缘的质点A(重力为F),和作用在砖3左边缘的质点B(重力

作者简介:鲍四元(1980－　),男,博士,副教授,研究方向为工程力学.

为 $1-F$). 假设砖 4 的左边缘和砖 2 的右边缘相距 x，如图 3 所示，则砖 4 的重心位置距离砖 2 右边缘为 $\frac{1}{2}-x$，根据重力等效方法及力系等效的合力矩定理，两质点块的重力(F 和 $1-F$) 对 A 的力矩等于合力($F_{合}=1$) 对 A 点的力矩，可得

$$(1-F)c = 1\cdot\left(\frac{1}{2}-x\right) \tag{1}$$

化简得出参数力 F 的值与砖 4 的摆放位置关系为

$$F=\frac{c+x-\frac{1}{2}}{c} \tag{2}$$

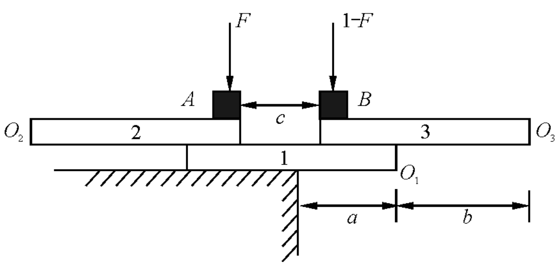

图 2　四叠砖 3 层叠放下的受力分析

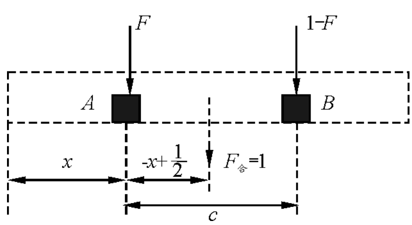

图 3　顶部砖 4 重力的等效示意图

根据重心位置分析建立长度间的不等关系式. 以 O_3 为原点(水平向左为正方向)，对砖 3 与质点 B 分析，其重心需要在下层叠砖 1 以内，有

$$\frac{1\cdot\frac{1}{2}+(1-F)}{2-F}\geqslant b \tag{3}$$

以 O_2 为原点(水平向右为正)，对砖 2 与质点 A 分析，其重心需要在下层叠砖 1 以内，有

$$\frac{1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot F}{1+F}\geqslant 1+c-b \tag{4}$$

以 O_1 为原点(水平向左为正方向)，对叠砖 1、2、3 和上部质点 A、B 整体作分析，其重心需要在桌面以内，有

$$\frac{1}{4}\cdot\left[-1\cdot\left(b-\frac{1}{2}\right)+(1-F)(1-b)+\right.$$

$$F(1-b+c)+1\cdot\left(\frac{3}{2}-b+c\right)+$$

$$\left.1\cdot\frac{1}{2}\right]\geqslant a \tag{5}$$

临界状态下，以上 3 个关于重心的算式均取等号，则悬出距离 s 为

$$s=a+b=\frac{1}{4}\cdot\left[3+\left(\frac{3}{2}-F\right)\frac{2+F}{2-F}\right] \tag{6}$$

使用 Mathematica 中的 FindMaximum 命令[7]，求出式(6) 中 s 的极值，当 F 取 $2-\sqrt{2}$ 或 0.585 8 时，得出 s 的最大值为 1.167 89. 此时由式(3) 得

$$b=1-\frac{\sqrt{2}}{4}\approx 0.646\ 4$$

由式(3) 得

$$c\approx 0.331\ 1$$

再由式(2) 得

$$x=0.362\ 8$$

即砖 4 的左边缘置于砖 2 右边缘 0.362 8 处.

3　五叠砖问题

基于上述步骤，继续利用重心讨论五叠砖的最大悬出距离.

3.1　5 层叠放

第一类称为 5 层叠放方式，如图 4 所示，取桌面边缘为原点，水平向右的方向为 x 轴正方向，设 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 分别是自下而上每层砖重心的坐标，则第 $i+1$ 层砖相对第 i 层砖的伸出距离为

$$s_i=x_{i+1}-x_i$$

总的伸出距离为

$$s=x_5+\frac{L}{2}$$

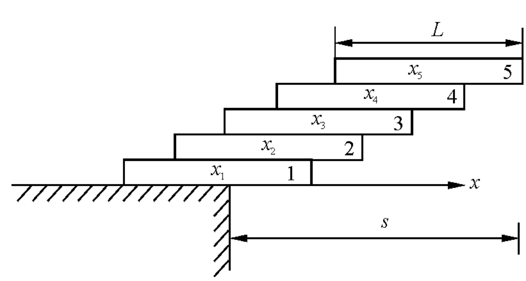

图 4　五叠砖的 5 层叠放方式

假设 5 块叠砖恰好均处在临界状态而不倒，整体重心必须在桌面边缘之内. 对每一层砖而言，其上部所有叠砖的重心必须在该层叠砖的端面内侧. 图

4 中，自上而下可得重心坐标存在如下关系

$$\begin{cases} x_5 \leqslant x_4 + \dfrac{L}{2} & (砖\ 5) \\ \dfrac{1}{2}(x_4 + x_5) \leqslant x_3 + \dfrac{L}{2} & (砖\ 4、5) \\ \dfrac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_5) \leqslant x_2 + \dfrac{L}{2} & (砖\ 3、4、5) \\ \dfrac{1}{4}(x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \leqslant x_1 + \dfrac{L}{2} & (砖\ 2、3、4、5) \\ \dfrac{1}{5}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \leqslant 0 & (所有叠砖) \end{cases} \tag{7}$$

临界状态下，上式中的不等式均取等号，联立方程组求得

$$x_5 = \frac{77}{120}L$$

则五叠砖的最大悬出距离为

$$s = \frac{137}{120}L$$

或

$$s = 1.141\ 67L$$

这些步骤可通过科学计算软件 Mathematica 快速计算实现[7]．根据式(7) 中的前 3 式，计算出 x_3、x_4 和 x_5 与 x_2 的关系，可验证 2.1 节中四叠砖 4 层叠放的悬出距离结果．

3.2　3 层叠放

第二类采用 3 层叠放方式，如图 5 所示．假设砖 1 位于底部，中间层由砖 2、砖 3 组成，最上层为砖 4 和砖 5．如图 6 所示，砖 1 右边缘与桌面边缘的距离为 a，砖 1 右边缘与砖 3 的右边缘距离为 b，砖 2 右边缘与砖 3 左边缘距离为 c．

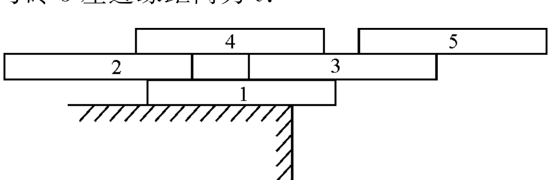

图 5　五叠砖的 3 层叠放方式

将砖 4 的重力等效为作用在砖 2 右边缘的质点 A(重量 G_A 记为 F) 和作用在砖 3 左边缘的质点 B，重量 G_B 记为$(1-F)$；欲使右端悬出距离最大，则砖 5 的重力等效为作用在砖 3 右边缘的质点 C，重量 G_C 为 1．

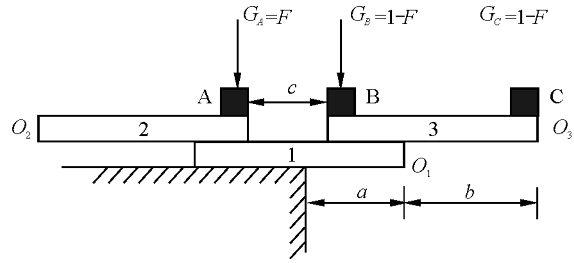

图 6　五叠砖 3 层叠放方式的受力分析图

根据重心位置分析建立关于悬出长度的不等式．以 O_3 为原点(水平向左为正方向)，对砖 3 及上方质点 B、C 分析，其重心的水平坐标需要在下层叠砖 1 的范围内

$$\frac{1 \cdot \frac{1}{2} + (1-F)}{3-F} \geqslant b \tag{8}$$

以 O_2 为原点(水平向右为正方向)，对砖 2 和重量为 F 的质点 A 分析，其重心的水平坐标需要在下层叠砖 1 的范围内

$$\frac{1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot F}{1+F} \geqslant 1 + c - b \tag{9}$$

以 O_1 为原点(水平向左为正方向)，对全部叠砖做整体分析，其重心的水平坐标需要在桌面的范围内

$$\frac{1}{5} \cdot \left[-b - 1 \cdot \left(b - \frac{1}{2}\right) + (1-F)(1-b) + F(1-b+c) + 1 \cdot \left(\frac{3}{2} - b + c\right) + 1 \cdot \frac{1}{2}\right] \geqslant a \tag{10}$$

临界状态下，关于重心的式(8) ～ (10) 均取等号，则悬出距离 s 为

$$s = a + b + \frac{1}{2} = \frac{2+F}{5}\,\frac{3-2F}{6-2F} + \frac{11}{10} \tag{11}$$

当 $\dfrac{\partial s}{\partial F} = 0$ 时，即 F 取 $3 - \dfrac{\sqrt{30}}{2}$ 或 0.261 387 时，得出 s 的最大值为 1.304 55．

3.3　4 层叠放

第三类叠放方式属于 4 层叠放方式，如图 7 所示．假设砖 1 位于底部，第二层为砖 2，第三层为砖 3、砖 4 组成，最上层为砖 5．如图 8 所示，砖 1 右边缘与桌面边缘的距离为 a，砖 1 右边缘与砖 2 的右边缘

距离为 b,砖 2 右边缘与砖 3 的右边缘距离为 d,砖 4 右边缘与砖 3 左边缘的距离为 c.

将砖 5 的重力等效为作用在砖 4 右边缘的质点 A(重量为 F),和作用在砖 3 左边缘的质点 B(重量为 $1-F$).

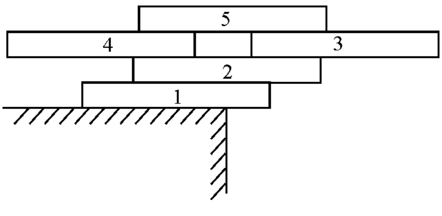

图 7 五叠砖的 4 层叠放方式

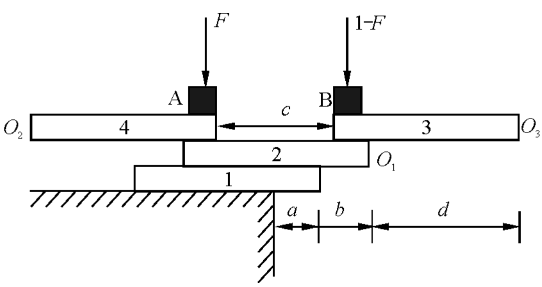

图 8 五叠砖四层叠放下的受力分析图

根据重心位置建立长度间的不等式. 以 O_3 为原点(水平向左为正方向),对砖 3 和重量为 $1-F$ 的质点 B 分析,其重心需要在下层叠砖 2 的长度范围以内

$$\frac{1 \cdot \frac{1}{2}+(1-F)}{2-F} \geqslant d \tag{12}$$

以 O_2 为原点(水平向右为正方向),对砖 4 和重量为 F 的质点 A 分析,其重心需要在下层叠砖 2 的长度范围以内

$$\frac{1 \cdot \frac{1}{2}+1 \cdot F}{1+F} \geqslant 1+c-d \tag{13}$$

以 O_1 为原点(水平向左为正方向),对砖 2、3、4 和质点 A、B 分析,其重心需要下层叠砖 1 的长度范围以内

$$x_{c1}=\frac{1}{4}\left[-1 \cdot\left(d-\frac{1}{2}\right)+(1-F)(1-d)+F(1-d+c)+1 \cdot\left(\frac{3}{2}-d+c\right)+1 \cdot \frac{1}{2}\right] \geqslant b \tag{14}$$

仍然以 O_1 为原点(水平向左为正方向),对砖 1、2、3、4 和质点 A、B 作整体分析,其重心需要在桌面以内. 故有

$$x_c=\frac{4 x_{c1}+1 \cdot\left(b+\frac{1}{2}\right)}{5} \geqslant a+b \tag{15}$$

临界状态下,以上关于重心的式(12)～(15)均取等号,则悬出距离 s 为

$$s=a+b+d=\frac{1}{4} \cdot\left[3+(2+F) \cdot \frac{\frac{3}{2}-F}{3-F}\right]+\frac{1}{10} \tag{16}$$

使用 Mathematica 中的 FindMaximum 命令求极值[7-8],当 f 取 $2-\sqrt{2}$ 或 0.585 786 时,得出 s 的最大值为 1.267 89.

综合上述几种情况,对五叠砖问题,3 层叠放时的悬出长度最大为 1.304 55 倍砖长,比 4 层叠放时的 1.267 89 倍砖长和 5 层叠放时的 1.141 67 倍砖长要大,由此得到五叠砖不同叠放方式下的最大悬出距离以及对应砖块的具体叠放方式.

4 结论

本文研究了桌面上的多叠砖问题. 首先把顶层砖等效为 2 个质点,然后根据重心位置的关系对叠砖的最大悬出距离进行研究,从而得出四叠砖与五叠砖在 3 层叠放方式下具有最大悬出距离,并得到对应的具体值及摆放方式.

另外,图 2 的叠放方式求解可归结为图 6 中的特例情况,即令 C 点处质点的重量 G_C 取零得到. 而图 8 的悬出距离可由图 2 在底部再添加一层砖进行求解得到.

类似地,可应用重心和临界平衡的概念研究 N 叠砖的最大悬出距离.

参 考 文 献

[1] 陶涛,邱为钢. 四叠砖的最大伸出距离[J]. 大学物理,2014,33(6):45-46.

[2] 陈展,马勇,张亮,等. 重心高度对浮式结构水动力性能的影响[J]. 科技导报,2013,31(18):22-26.

[3] 周天弈,陈奎孚,陈雪冬."三根火柴吊八瓶矿泉水"的平衡分析[J]. 物理与工程,2021,31(1):28-30.

[4] 姜付锦. 悬链线的重心问题研究[J]. 物理教师,2010,

31(7):37－39.

[5] 张小红,张建勋.数学软件与数学实践[M].北京:清华大学出版社,2004.

[6] 张勇.Mathematica 科学计算与程序设计[M].西安:西安电子科技大学出版社,2021.

[7] 张韵华.Mathematica 7 实用教程[M].2 版.合肥:中国科学技术大学出版社,2019.

[8] 克里夫·黑斯廷斯,开尔文·米斯裘,迈克尔·莫里森.Mathematica 实用编程指南[M].Wolfram 传媒汉化小组,译.北京:科学出版社,2020.

[9] 程玉明.叠砖的平衡问题[J].大学物理,1997,16(5):48－49.

[10] 李行,彭程,荣成成,等.叠砖问题[J].数学通讯,2004(Z1):95－96.

New Solution for Maximum Hanging Distance of Stacked Bricks and Its Application

BAO Siyuan SONG Dandan SHEN Feng

(Schol of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou, Jiangsu 215011)

Abstract: In this paper, two kinds of stacking methods of quadruple brick are given: 4－layer stacking and 3－layer stacking. Different from the conventional moment equilibrium method, in the proposed method the weight of the top brick is equivalent to the weight of two particles, then the expression of the overhanging distance of the stacked brick is obtained by using the relationship between the center of gravity in the critical equilibrium state, and the maximum value for the hanging distance is obtained. By using the same idea, the maximum overhanging distance of five-fold brick is calculated. The paper proposes a new solution method for the hanging distance of stacked bricks based on the concept of gravity center.

Key words: brick stacking problem; hanging distance; gravity center

(上接第 139 页)

点的变式训练.视频练习的方式更能调动学生的多重感官,使学生掌握凸透镜的成像规律,从而将有效驱动学生"多问、多解".

3.4 拓展实验教学 增强多问思维

物理课程含万物,在实验教学中,教师不能只关注教材中的文字,而是要从文字中剖析编写教材的意图,并对其做出拓展延伸,由此才能切实发挥物理课程的教育价值.广东中考物理试题中含有大量的生活化素材,这充分突出了物理来自于生活的理念,所以教师在实验教学中需要多多挖掘学生熟悉的生活素材,这样才能点燃学生的参与兴趣,由此促使学生逐渐主动提出问题.以八年级物理上册"光的反射、光的折射"为例,在相关实验教学中,教师便可以从身边的物理现象入手.常见的生活现象会打破学生的固有认知,自然会点燃学生内心的问题意识,于是学生将会主动提出疑问,由此积极经历完整的实验过程[4].

4 结束语

总而言之,中考物理实验试题千变万化,新课改背景下的物理实验试题既考查了学生的知识经验,又关注了学生的思维能力.因此,物理教师需要悉心提取试题下的能力要求,坚持"一切为了学生,为了一切学生"的思想对以往的实验教学模式做出全面优化与创新,并在教学实践中加强对学生问题意识的培养,使学生形成良好的多问思维,从而真正实现应试教育向素质教育的转变.

参考文献

[1] 李松柏.初中物理实验教学中学生探究能力的培养[J].文理导航(中旬),2022(7):82－84.

[2] 郜建辉.中考物理设计实验考查的指向和命题建议——以 2020 年天津市中考物理第 24 题为例[J].物理实验,2021,41(5):54－58.

[3] 张粉菊.浅析中考试题映射出的初中物理实验教学方法[J].试题与研究,2021(13):35－36.

[4] 杨帆.新课程背景下对初中物理实验探究题型的思考[J].山海经,2019(4):90.