坐标系能否缺席？*

——“运动的分解”教学疑难的消解与启示

杨振东　于海波
（东北师范大学教师教育研究院　吉林 长春　130024）

（收稿日期：2022-06-30）

摘　要："运动的分解”教学疑难主要体现在“分解运动的依据”及习题教学中的“分解—关联”问题两方面. 从学科逻辑出发，梳理了“运动的分解”背后的脉络，提炼出“坐标系”在分解过程中的作用并将其显化，用以优化“运动的分解”的教学路径. 最后，给出两点教学上的启示，以期为物理方法教学提供镜鉴.

关键词：运动的分解；坐标系；教学疑难；教学优化

高中物理课程中，“运动的合成与分解”是矢量运算法则在质点运动学中的具体应用，也是研究复杂运动的重要思想方法. 从学科本源追溯，“运动的合成”实质是两个真实运动在转换参考系后的叠加关系[1-2]，而“运动的分解”却不易寻根溯源. 教学中往往循名责实，将其等同为前者的逆过程，这在一定程度上遮蔽了“运动的分解”背后的思想方法，以致教学中诸多疑难接踵而来，相关研讨热度不减. 着眼于常见困惑，本文展开了系统的分析.

1　教学中的普遍困惑

1.1　新授课中教学逻辑的困惑

“运动的分解”新授课的教学疑难主要聚焦在分解的依据上. 传统教学普遍以“寻找独立性”为起点，如平抛运动教学中，演示平抛运动与自由落体运动同时落地的现象，证明水平运动不影响竖直运动，故将平抛运动分解为水平与竖直两个方向的运动. 这里格外强调了两个分运动间互不影响、具有独立性，进而将其提升为一条普遍原理——“任何一个复杂的运动，都可以看作是几个独立进行的分运动的合运动，这叫做运动的独立性原理”，并将其奉为分解运动的依据. 然而，细究人教版教材中“蜡块运动”的演示实验[3]，若玻璃管加速右移，会使蜡块与玻璃管压力增大，从而增大摩擦，影响竖直分运动，这显然与“运动的独立性原理”相悖[4]. 同样，空气阻力作用下的抛体运动、洛伦兹力参与时带电粒子的偏转运动等实例也都表明，分运动之间相互独立、互不关联的现象并不具有普遍性. 甚至有学者指出[5]，物理学理论中根本不存在“运动的独立性原理”一说[5]. 上述质疑动摇了“寻找独立性”的教学逻辑，致使分解运动的起点成为一个悬而未决的问题.

1.2　习题教学中“分解—关联”的困惑

习题教学中的疑难则更普遍. 典型母题是在图1所示“拉船靠岸”情境中，设问讨论绳端速度 $v_{绳}$ 与船速 $v_{船}$ 之间数值关系的习题（后文简称“拉船靠岸”类问题）.

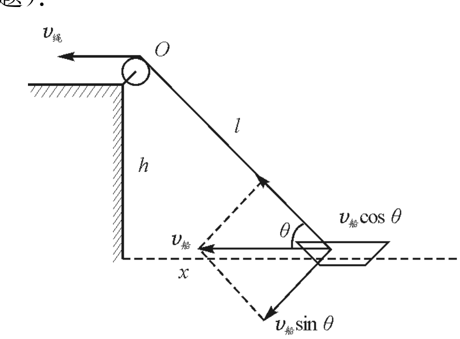


图 1　“拉船靠岸”问题中的运动分解

教学中常将船速分解为沿绳与垂直于绳两个方向，并将船速沿绳方向的分量与绳端速度相关联（$v_{绳}=v_{船}\cos\theta$）. 这一“先分解、后关联”的方法为师生所熟稔，已成为约定俗成的“常识性方法”.

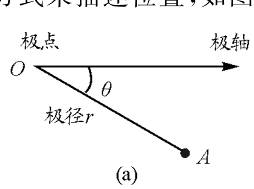
* 2021 年北京师范大学中国基础教育质量监测协同创新中心课题项目“乡村教师教学胜任力测评研究”，项目编号：202103006BZPK01；“高中教师知识观对教学胜任力的影响研究：基于大规模测评的因果推断”，项目编号：BJZK-2021A3-21015；2021 年北京师范大学中国基础教育质量监测协同创新中心研究生自主课题阶段性研究成果.

这类典型习题与解法的出现，对教学造成的冲击是明显的. 首先，“运动的分解”常被视为研究复杂曲线运动的手段，但这类习题表明直线运动亦有分解处理的必要，打破了将“运动的分解”和“曲线运动”绑定的思维定势. 其次，这种正交分解方式选取的基底并不“安分”，而是随物体运动而变化，这明显与分解平抛运动惯用的平面直角坐标系不同，教学中需给出妥善解释. 此外，船速沿绳方向的分量 $v_{船}\cos\theta$ 可以与绳端速度 $v_{绳}$ 关联（$v_{绳}=v_{船}\cos\theta$），但船的加速度 $a_{船}$ 与绳端加速度 $a_{绳}$ 之间的关系却不能移植这一逻辑（$a_{绳}\neq a_{船}\cos\theta$），其中的龃龉也常常引起困扰与研讨[6-8]. 要解决上述问题，需要从学科逻辑上追本溯源，将视线回归“运动的分解”本身.

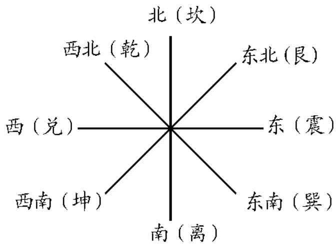
2　基于学科逻辑的“运动的分解”再认识

2.1　表征平面位置需借助二维空间的几何模型

研究运动的逻辑起点在于表征位置，这需要将参考系抽象为坐标系. 在二维空间的视角下，如果事先未给定运动轨迹，那么描述位置必须构建二维坐标系模型. 第一类模型是平面直角坐标系：其特点是基底固着于参考系. 将质点到两个坐标轴的垂直距离简化为 x、y 两个独立坐标，这样，利用 (x,y) 即可完备地确定质点的位置. 第二类模型是平面极坐标系：以某一点 O 为极点，向某一固定方向引出一条射线构成极轴. 这样，平面上任意点 A 所在位置就可以由到极点的距离 r，以及相对于极轴的方位角 θ 来清晰刻画. 极坐标系的特点是基底方向跟随极径方向而变化. 事实上，早在两类坐标系被抽象成数学模型之前，人们已经能利用这两种方式来确定位置了. 晋代学者裴秀（224 — 271）用“广”“轮”（类似今天的经、纬）两个概念描述位置并绘制地图，就可以视为我国本土的“平面直角坐标系”雏形. 而古代用八卦表示方位，也意味着那时人们已会用极坐标系“方位角 + 距离”的方式来描述位置，如图 2 所示.



(a)



(b)

图 2　平面极坐标系描述位置及其古代雏形

值得说明的是，常用的自然坐标系是在运动轨迹已知时，以质点自身为坐标原点，将坐标轴建立在该处轨迹的切线和法线方向，基底方向随轨迹而变. 自然坐标系一般无法描述质点以及其他点的空间位置，只能表示质点的速度、加速度在切向与法向上的变化.

2.2　“分运动”源于二维或三维坐标系下的分量表征

从数学上看，机械运动表现为位置坐标随时间发生变化. 在平面直角坐标系下，要寻找坐标 (x,y) 随时间的变化规律 $f(x,y,t)$，最简便的方法即找出 x、y 两个独立坐标各自随时间的变化规律 $x=x(t)$ 与 $y=y(t)$. 由于 x、y 轴方向固定，因而 $x=x(t)$ 与 $y=y(t)$ 可等效为 x、y 两个方向的直线运动；同理，极坐标系下描述质点运动，也可以将极径 r 的长度变化与方位角 θ 的变化，分别等效为两个运动 $r=r(t)$、$\theta=\theta(t)$，即沿极径的直线运动与绕极点的“角运动”. 为了数学操作上的统一，将描述角运动的角量改用线量表示. 在上述两种坐标系中，分运动的速度、加速度既可以由独立坐标对时间求导得出数值大小，也可以由实际运动的速度、加速度矢量在坐标轴的投影，即矢量的“分量”呈现. 两种坐标系下对质点平面运动的分解对比如表 1 所示.

综上所述，对“运动的分解”我们不妨做出如下理解：在二维（乃至三维）空间视角下，完备表征质点的位置需要不止一个独立坐标. 质点运动引起的这些独立坐标随时间的变化，即可等效为实际运动的分运动. 这里无需限定质点的运动轨迹是否为曲线，而更应关注我们是以几维空间的视角来认识运动的. 即使一段直线运动，如果以三维视角看待，那么它也是“三维运动”，可以建立空间直角坐标系、球坐标系或柱坐标系，用三个独立坐标来描述其位置，

并据此作出三维视角下的分解.因此,“运动的分解”教学应实现的目标之一,即引导学生将认识质点运动的视角和方法从一维过渡到二维、甚至三维,而不应局限于“直线运动到曲线运动”这一形式上.

表 1　两种坐标系下对质点平面运动的分解表征

	平面直角坐标系	平面极坐标系
坐标轴的确立	固定不动的 x 轴和 y 轴	固定的极轴和变化的极径
质点位置的确定	坐标(x,y)	坐标(r,θ)
位移的描述	线量描述	线量描述 + 角量描述
运动学量的分解方式	正交分解	正交分解
速度的分解	分解至固定的 x、y 方向:$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$	随质点运动,分解至极径的径向和横向 $\boldsymbol{v} = v_r\boldsymbol{e}_r + v_\theta\boldsymbol{e}_\theta$
加速度的分解	分解至固定的 x、y 方向:$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}$	随质点运动,分解至极径的径向和横向 $\boldsymbol{a} = a_r\boldsymbol{e}_r + a_\theta\boldsymbol{e}_\theta$
分运动的描述	x、y 方向的两个直线运动	沿极径的直线运动与绕极点的角运动

2.3　运动的分解与合成并非互逆过程

需澄清的是,分运动与实际运动在同一坐标系中的统一(如 $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$),意味着分运动是实际运动在该参考系下的等效,“等效”说明分运动在该参考系中并不能被实际观察到.而运动的合成,则是在静止与运动两个参考系下,对质点参与的两个真实运动进行叠加.例如“蜡块运动”实验中,蜡块同时参与的两个运动——玻璃管向右的平移(参考系为地面)、蜡块的上升(参考系为玻璃管),均是可观察到的真实运动,蜡块相对地面的运动情况实质上是由这两个真实运动的伽利略变换来得到.因此,运动的分解与合成是两个不同性质的问题,并非简单的互逆过程.基于上述理解,我们将“运动的分解”与“运动的合成”的逻辑结构图用两个不相交的虚线框表示,如图 3 所示.

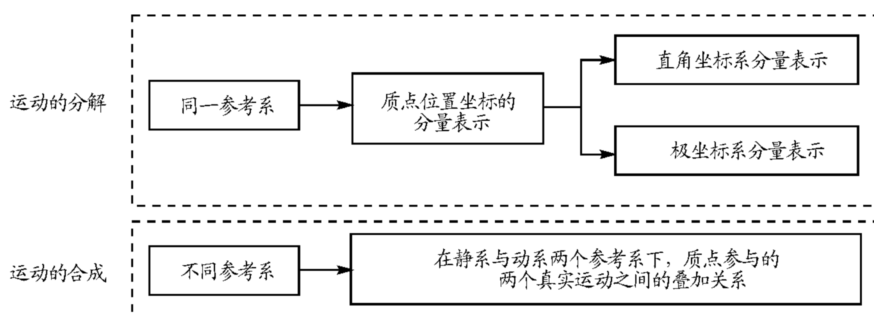


图 3　“运动的合成与分解”逻辑结构框架

3　显化“坐标系”后的教学疑难处理

3.1　新授课的教学逻辑呈现

每个独立坐标分别随时间的变化,都可以等效为实际运动的某一分运动.在二维视角下描述运动,既可以建立平面直角坐标系,将其分解为 x 与 y 两个方向的直线运动,也可以建立极坐标系,将其分解为“绕极点的角运动”和“沿极径的直线运动”.建立的坐标系不同,映射出人们描述运动的视角不同,由此延伸出的分解方式也不同.运动的分解正是借助对应的坐标系,将这种视角显化.因此,分解运动的起点在于坐标系的建立,由此方能引出分运动的坐标表征,乃至分运动的速度、加速度表征.在平面上确定某点的位置,无论用何种坐标系都需要至少 2 个独立坐标.物理学中,我们将确定研究对象在空间中的位置所需的最小坐标数称为自由度.质点在二维空间有 2 个自由度,这就需要建立二维坐标系.因而建立怎样的坐标系则构成了“运动的分解”的教学起点.盖因如此,《普通高中教科书教师教学用书》将“会根据研究

问题的需要建立合适的平面直角坐标系”列为本节的教学目标之首[9]. 鉴于此，本文认为，“坐标数 → 坐标系 → 运动学量在坐标系下的分解”这一逻辑既可有效回避“运动的独立性原理”，也能为后续教学中建立极坐标系、斜交坐标系分解运动提供方法论参照.

3.2　“分解-关联”困惑的有效开解

“拉船靠岸”类问题中的“分解-关联”困惑，在显化坐标系后亦能有效地破解. 当我们将运动学量动态地分解为“沿绳方向”与“垂直于绳方向”，不难发现沿绳方向的分量始终经过滑轮，这暗合了极坐标系下的分解方式，如图 4 所示. 因此，理应以相应视角，将小船的实际运动分解为极径方向(沿绳方向)的直线运动与绕极点的角运动(对应的线速度垂直于绳方向). 这样，实际指向极点方向的加速度包含两项，小船加速度除了沿绳方向的分量外，还附有“角运动”的线速度 v_θ 方向改变带来的向心加速度. 这样，“拉船靠岸”类问题中加速度不能类比速度关联的根本原因也就不证自明了.

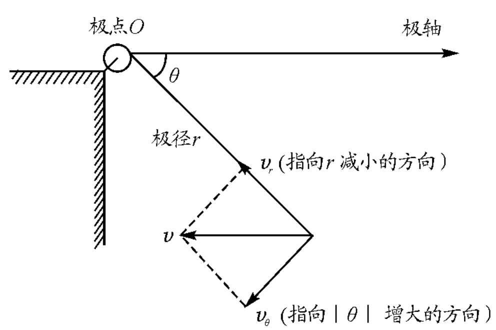


图 4　显化坐标系后“拉船靠岸”问题的运动分解

分析发现，“运动的分解”中坐标系起着不可或缺的作用，如图 5 所示：第一，利用坐标系才能实现对实际运动的精准描述，无论是位置、速度还是加速度，都依赖于坐标系来定量表征. 第二，明确了分解运动的“视角”—— 在二维或三维视角下如何确定物体的位置、如何据此来描述物体位置的变动. 第三，依托坐标系呈现对分运动的描述，包括对分运动的位置、速度、加速度等运动学量的完备表征. 第四，坐标系的参与使“运动的分解”超越了速度、加速度等矢量的“暂态分解”，实现了分运动与实际运动的动态统一.

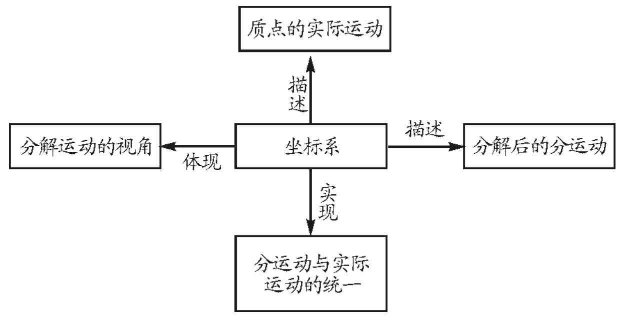


图 5　“运动的分解”中坐标系的功能抽提

4　教学启示

对“运动的分解”做出系统讨论，并得到坐标系在其中的关键作用后，归结出以下两点教学启示.

4.1　辩证看待坐标系在物理教学中的作用

“坐标系”常作为质点运动学篇章开宗明义的第一讲内容出现，其后逐渐消弭于师生的视野. 对此许多教师认为，强调坐标系会导致“数学味”过浓且逻辑臃肿，淡化坐标系是消除冗余之举. 但“运动的分解”研究启示我们，物理教学固然应提防过度“数学化”带来的风险，但亦不应走向另一种极端，连同坐标系这类基础工具一起丢弃，否则极有可能带来教学的困扰. 诚如梁昆淼先生所言，“必须有这样一个极为强烈的观念，要解决任何一个具体的力学问题，首先应当建立坐标系. ”[10] 诸多实例也表明，坐标系的缺席并不一定带来解决问题的简洁，亦可能导致认识上的模糊甚至混乱[11]. 因此应辩证看待坐标系这类数学工具，在教学中适度挖掘、显化其功用，以实现物理方法教学的优化.

4.2　重视弥合新授课与习题教学间的“真空地带”

新授课中的“平面直角坐标系”分解，与习题教学中出现的“极坐标系”分解，表面似乎都是平行四边形法则下的正交分解操作，实质上却存在显著差别. 盖因如此，学生对“拉船靠岸”类问题的分解方法往往感到陌生与“不适”，而这一现象是普遍的. 新授课的内容设计往往以教材与课程标准的基本要求为依据，而习题变式中的断层式拔高，使二者之间出现了一段明显的“真空地带”. 教师若不对课程内容进行深化理解与合理超越，而盲目要求学生掌握解题策略与技巧，就容易出现困难和低效. 对此，教师

(下转第 49 页)

5　问题的拓展

笔者在解决了试题 1 的补偿矫正后，在接下来的学生测试中，偶然发现了与试题 1 类似的有关特殊温度下温度计选择的开放性试题.

【试题 3】苏科物理“熔化与凝固”课后 WWW：查一查在寒冷的北方地区，人们为什么常使用酒精温度计而不使用水银温度计测气温？而在实验室水的沸腾实验中，为什么用煤油温度计而不使用酒精温度计测沸水的温度？

酒精、水银及煤油等液体温度计都是利用了测温液体的热胀冷缩的性质来测量温度的. 如果酒精、水银、煤油等测温液体凝固成了固态或变成气态就无法按比例热胀冷缩，体积变化不大或不固定，也就无法正常升降而用来测量温度了. 查晶体熔点表(同一物质的凝固点跟它的熔点相同) 可知：酒精的熔点是 －117 ℃，所以酒精降至 －117 ℃ 且继续放热才能凝固；水银的熔点是 －39 ℃，故水银降至 －39 ℃ 且继续放热就会凝固，寒冷的北方地区气温可低至 －40 ～－60 ℃，水银的凝固点相比北方的最低气温太高了，会很快凝固. 而酒精的凝固点比北方最低气温还要低很多，不能凝固，还是液态的，所以可以用来测气温. 又查标准气压下一些液体的沸点表可知：水的沸点是 100 ℃，酒精的沸点是 78.5 ℃，而煤油的沸点约为 150 ℃，酒精的沸点低于水的沸点，实验时若用酒精制成的温度计测沸水的温度，酒精会变成气体而无法进行测量，煤油的沸点高于水的沸点，在沸水中也不会沸腾，所以可以测量沸水的温度.

6　结束语

在物理教学中，培养学生应用数学模型的意识，可以有效提升学生物理思维能力[4]. 在“用数轴判定物质状态” 教学中，通过研究性备课，帮助学生巧用数轴，结合影响物质状态的两个特殊温度点，数理结合，能够更直观地观察和判断物质所处的状态. 世间万物的运行都是有规律可循的，只要找到了这个规律，就能轻而易举地把握其特征和状态. 作为教师，更应善于钻研、精于钻研，以研究性备课的意识，帮助学生找出规律，避免走很多弯路.

参 考 文 献

[1] 徐锐.“物态变化” 常考易错题[J]. 初中生世界(八年级物理)，2011 (Z5).

[2] 姜桂祥.“物态变化” 易错点例析[J]. 中学生数理化(八年级物理)(人教版)，2008 (11) .

[3] 杨元俊.“物态变化” 易错题归类剖析[J]. 数理化学习(初中版)，2009 (8).

[4] 支从兵. 高中物理习题教学中创新思维能力培养策略研究[D]. 贵阳：贵州师范大学，2008.

(上接第 45 页)

应保持足够的警惕，重视弥合新授课与习题教学中的断裂点，在深入把握学科逻辑的基础上加以设计与整合.

参 考 文 献

[1] 漆安慎，杜婵英. 力学[M]. 2 版. 北京：高等教育出版社，2005：50 - 54.

[2] 夏征农，陈至立. 大辞海(第 26 卷) · 数理化力学卷[M]. 上海：上海辞书出版社，2015：774.

[3] 人民教育出版社，课程教材研究所，物理课程教材研究开发中心. 普通高中教科书 · 物理必修第二册[M]. 北京：人民教育出版社，2019：6 - 7.

[4] 胡扬洋. 对“运动的独立性”与“力的独立作用原理”的再认识 —— 兼论“平抛运动” 教学的逻辑[J]. 物理通报，2013(7)：116 - 118.

[5] 教育部师范教育司. 高中物理专题分析：运动学[M]. 北京：人民教育出版社，1999：40 - 48.

[6] 周侃，周军. 加速度分解不能类比速度分解[J]. 物理教学，2008，30(1)：40，19.

[7] 陈向群，王旭. 不可伸长轻绳约束体间加速度的讨论[J]. 物理通报，2014(8)：40 - 41.

[8] 张海利，侯恕. 拉船靠岸问题绳有加速度高观点分析[J]. 中学物理，2018，36(15)：49 - 50.

[9] 人民教育出版社，课程教材研究所，物理课程教材研究开发中心. 普通高中物理教科书教师教学用书 · 物理必修第二册[M]. 北京：人民教育出版社，2019：9.

[10] 梁昆淼. 力学(上册)[M]. 北京：高等教育出版社，2010：28.

[11] 杨振东，高寒萱. 重申“位置-时间关系” 本质内涵的必要性 —— 兼谈“坐标系意识” 淡化的隐忧[J]. 物理通报，2021(10)：130 - 133.