

一道选考试题引发的电磁感应 RC 并联问题的探讨*

黄晶

(杭州学军中学 浙江 杭州 310032)

赵坚

(昆明市五华区基础教育发展研究院 云南 昆明 650031)

(收稿日期:2022-06-30)

摘要:针对“2021年1月浙江物理选考试题中所涉及的特殊含容电磁感应模型”进行深度探讨,通过定量计算严格证明了其运动存在稳定的终极状态,明确了题目条件的合理性与自洽性。

关键词:模型建立;电磁感应; RC 并联问题

1 引言

2021年1月浙江选考物理第21题是一道考查电磁感应和牛顿第二定律知识的试题,该题第(4)问涉及到对 RC 并联问题的考查,原题如下:

【题目】嫦娥五号成功实现月球着陆和返回,鼓舞人心.小明知道月球上没有空气,无法靠降落伞减速降落,于是设计了一种新型着陆装置.如图1所示,该装置由船舱、间距为 l 的平行导轨、产生垂直船舱导轨平面的磁感应强度大小为 B 的匀强磁场的磁体和“ \wedge ”型刚性线框组成,“ \wedge ”型线框 ab 边可沿导轨滑动并接触良好.船舱、导轨和磁体固定在一起,总质量为 m_1 .整个装置竖直着陆到月球表面瞬间的速度大小为 v_0 ,接触月球表面后线框速度立即变为零.经过减速,在导轨下方缓冲弹簧接触月球表面前船舱已可视为匀速.已知船舱电阻为 $3r$,“ \wedge ”型线框的质量为 m_2 ,其7条边的边长均为 l ,电阻均为 r ,月球表面的重力加速度为 $\frac{g}{6}$.整个运动过程中只有 ab 边在磁场中,线框与月球表面绝缘,不计导轨电阻和摩擦阻力.

(1)、(2)、(3)略.

(4)同桌小张认为在磁场上方、两导轨之间连接

一个电容为 C 的电容器,在着陆减速过程中还可以回收部分能量,在其他条件均不变的情况下,求船舱匀速运动时的速度大小 v' 和此时电容器所带电荷量 q .

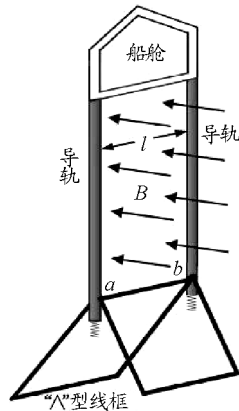


图1 新型着陆装置示意图

本题第(4)问命题者给出的解答是:匀速运动时电容器不充放电(v 已由第3问求出)

$$v' = v = \frac{m_1 gr}{3B^2 l^2}$$

$$U_C = \frac{1}{3} I \cdot 3r = \frac{m_1 gr}{6Bl}$$

$$q = CU_C = \frac{m_1 grC}{6Bl}$$

考试完毕后,关于试题第(4)问涉及的物理情

* 2022年度教育部高等学校教学研究课题“实施社会性科学议题教学以提高学生科学素养的实践研究”,课题编号:WX202249;浙江省教研课题“高中物理科学态度与责任素养培养的实践研究”的阶段性成果,课题编号:G2022035.

作者简介:黄晶(1978-),男,中学高级教师,主要从事中学物理教学和研究.

通讯作者:赵坚(1969-),男,正高级教师,主要从事基础教育教学科研管理和教学改革研究.

境引发了不少学生的疑惑,究其原因,主要是反映该试题中为什么船舱最终能达到匀速状态.还有学生反映在考试中虽然推导出了此过程的合理性,但列出式子后却无法求解.

鉴于此问题具有一定代表性,加之学生在平时练习中较多遇到的是受恒定外力作用下的含电容电磁感应问题^[1-2],而此类问题中的导体棒一般处于匀加速运动状态.故本文在此试图就相关涉及问题作点深入探讨,供大家教学中参考.

2 问题探讨

不失一般性,为讨论问题方便,我们可将试题第(4)问情境简化抽象为如图2所示模型.竖直放置的两根足够长的光滑金属导轨相距为 l ,导轨上端接有一电容为 C 的电容器和电阻 R ,导轨处于方向垂直平面向外的匀强磁场 B 中,让一根质量为 m 的金属导体棒从导轨上端由静止开始下滑,且在下滑过程中保持与导轨垂直并良好接触.不计导轨电阻,电容器开始不带电,解析导体棒此后的运动情况.

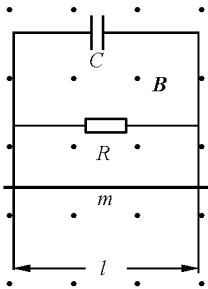


图2 装置简化模型

2.1 导体棒电阻不计时的运动分析

如图3所示,对导体棒受力分析可得动力学方程

$$mg - BIl = ma \quad (1)$$

其中电流满足

$$I = I_1 + I_2 \quad (2)$$

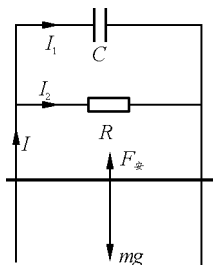


图3 导体棒受力及电流

由于不计导体棒电阻,电容器充电可认为瞬间完成,电容器两端电压始终与导体棒切割产生的感应电动势相等,也与电阻两端电压相等,即

$$Blv = U_C = I_2 R \quad (3)$$

进一步考虑到

$$U_C = \frac{q}{C} \quad (4)$$

和

$$I_1 = \frac{dq}{dt} \quad (5)$$

联立式(1)~(5),整理得到

$$mg - \frac{B^2 l^2}{R} v = (m + CB^2 l^2) a \quad (6)$$

式(6)可以化为

$$-\frac{B^2 l^2}{R} (v - v_f) = (m + CB^2 l^2) \frac{d(v - v_f)}{dt} \quad (7)$$

其中收尾速度为

$$v_f = \frac{mgR}{B^2 l^2}$$

继续化简得到

$$d \ln(v_f - v) = -\frac{B^2 l^2}{R(m + CB^2 l^2)} dt = -\lambda dt$$

两边积分,得到导体棒速度与时间的表达式

$$v = v_f (1 - e^{-\lambda t})$$

以及电容电荷与时间的表达式

$$q = BlCv = BlCv_f (1 - e^{-\lambda t}) = q_0 (1 - e^{-\lambda t})$$

电阻中电流与时间的表达式

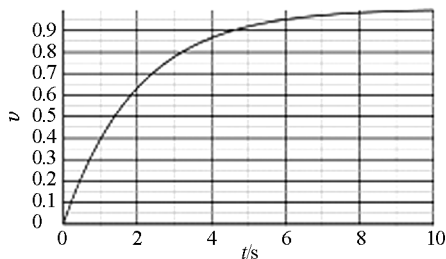
$$I_2 = \frac{Blv}{R} = \frac{Blv_f}{R} (1 - e^{-\lambda t}) = I_{20} (1 - e^{-\lambda t})$$

电容中电流与时间的表达式

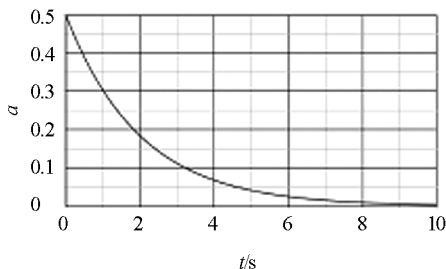
$$I_1 = \frac{dq}{dt} = \lambda q_0 e^{-\lambda t} = I_{10} e^{-\lambda t}$$

由以上讨论可得:导体棒做加速度减小的加速运动,最终将趋于匀速运动状态,其运动情况与无电容时的情况十分类似.

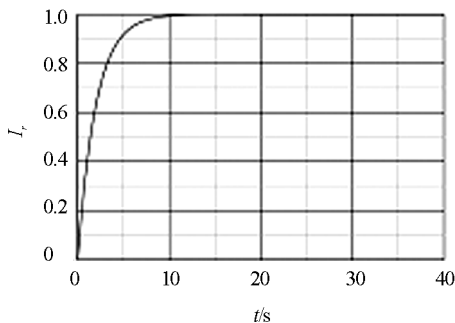
以下是相关数据归一化后的数值模拟图,如图4所示.



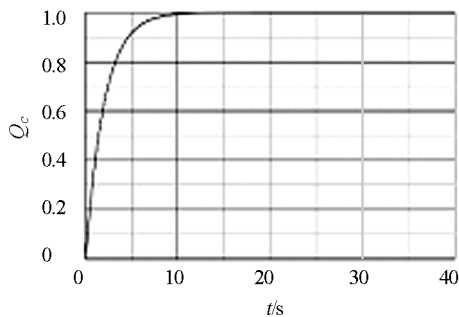
(a) 导体棒速度与时间关系图



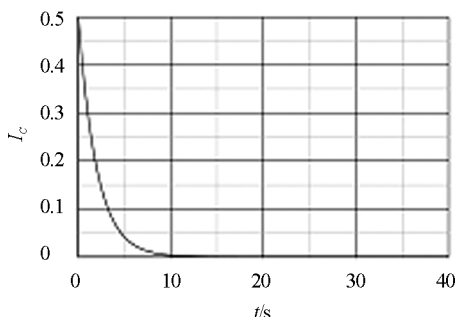
(b) 导体棒加速度与时间关系图



(c) 定值电阻中电流与时间关系图



(d) 电容器上电荷量与时间关系图



(e) 电容器中电流与时间关系图

图4 不计导体棒电阻时数据归一化数值模拟图

2.2 导体棒电阻不可忽略时的运动分析

导体棒电阻不可忽略时的受力分析如图5所示,之前的式(1)、(2)、(4)、(5)此时同样适用.由于增加了导体棒电阻,结合基尔霍夫定律将式(3)修正为

$$U_C = I_2 R \quad (8)$$

$$Blv = U_C + Ir \quad (9)$$

为分析问题方便,后续计算过程中统一用 U 表示电容器上电压 U_C .

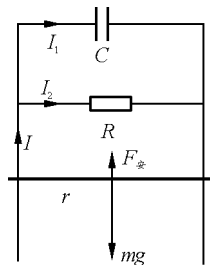


图5 计入导体棒电阻时受力及电流

式(9)两边对时间求导得到

$$\frac{dU}{dt} + r \frac{dI}{dt} = Bl \frac{dv}{dt} \quad (10)$$

式(4)两边对时间求导得到

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = \frac{I_1}{C} \quad (11)$$

进一步将式(11)两边对时间求导得到

$$\frac{dI_1}{dt} = C \frac{d^2 U}{dt^2} \quad (12)$$

式(8)两边对时间求导得到

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dU}{dt} \quad (13)$$

再由式(2)得到

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} \quad (14)$$

联立式(10)、(12)、(13)、(14)4式,进一步整理可得到

$$\frac{mCr}{Bl} \frac{d^2 U}{dt^2} + \left[\frac{m(R+r)}{BlR} + CBl \right] \frac{dU}{dt} + \frac{Bl}{R} U = mg \quad (15)$$

式(15)为二阶线性常系数微分方程,考虑到求解过程较为复杂,在此首先给出结果,方便后续讨论,具体理论推导过程详见附录.其解为

$$U = \frac{mgR}{Bl} \cdot$$

$$\left[1 - \frac{(-\alpha + \beta)e^{(-\alpha-\beta)t} + (\alpha + \beta)e^{(-\alpha+\beta)t}}{2\beta} \right] \quad (16)$$

其中

$$\alpha = \frac{b}{2a} \quad \beta = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

$$a = \frac{mCr}{Bl}$$

$$b = \frac{m(R+r)}{BlR} + CBl$$

$$c = \frac{Bl}{R}$$

由式(12), 电容器电流最大值相当于电容器两端电压对时间二阶导数为零, 由式(16), 计算得到

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{mgR}{2\beta Bl} (\alpha^2 - \beta^2) \cdot$$

$$\left[(\alpha + \beta)e^{(-\alpha-\beta)t} - (\alpha - \beta)e^{(-\alpha+\beta)t} \right] = 0$$

由此解得电流最大值对应时间为

$$t_{\max} = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$$

电容器电流为

$$I_1 = C \frac{dU}{dt} = \frac{mgCR}{2B\beta l} (\alpha^2 - \beta^2) e^{(-\alpha+\beta)t} (1 - e^{-2\beta t})$$

极大值为

$$I_{1\max} = \frac{mgCR}{Bl} (\alpha - \beta) \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^{\frac{\alpha - \beta}{2\beta}}$$

综上所述可得: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e^{(-\alpha-\beta)t} \rightarrow 0, e^{(-\alpha+\beta)t} \rightarrow 0$ (考虑到 $\alpha > \beta$).

结合式(2)、(8)、(9)、(11)、(16) 得到

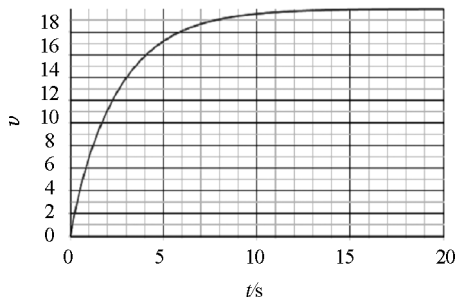
$$v = \frac{1}{Bl} \left(\frac{R+r}{R} U + Cr \frac{dU}{dt} \right) \quad (17)$$

可见, 经过足够长时间后, $U \rightarrow \frac{mgR}{Bl}$ 为定值,

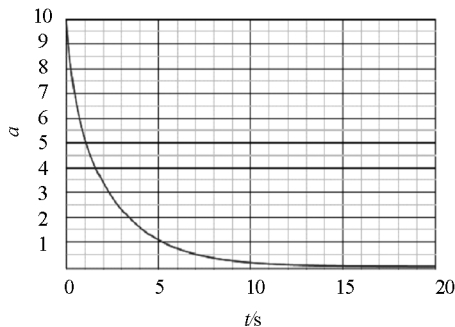
$\frac{dU}{dt} \rightarrow 0$ 亦为定值, 故而速度趋于定值. 导体棒将做

匀速运动, 亦即试题所给的条件是成立的.

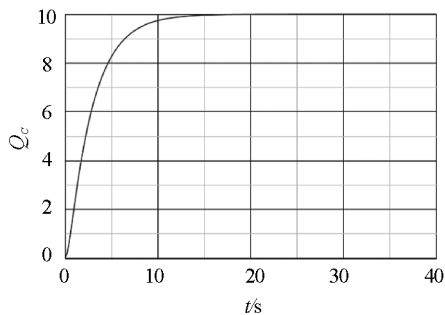
以下是相关数据归一化后的数值模拟图, 如图6所示.



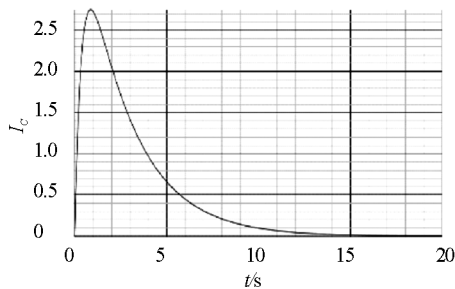
(a) 导体棒速度与时间关系图



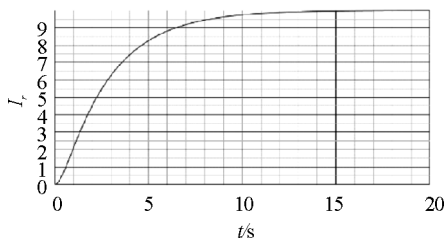
(b) 导体棒加速度与时间关系图



(c) 电容器中电荷量与时间关系图



(d) 电容器中电流与时间关系图



(e) 定值电阻中电流与时间关系图

图6 计入导体棒电阻时数据归一化数值模拟图

从图6不难看出, 随着导体棒逐渐下落, 最终电容器两端电压、导体棒运动的加速度和速度均趋于定值.

综上所述, 在试题设计情境中, 无论导体棒有无电阻, 其最终都为匀速运动状态, 若直接考查导体棒有电阻时的最终运动状态, 则需要解微分方程, 这超出高中生知识范围. 因此, 本试题在命题过程中充分考虑到试题难度以及学生实际水平, 设问中通过降阶处理直接给出匀速运动状态, 避开了过程分析中

(下转第161页)

问题所采取的探究方式. 比如“角速度”概念的建立过程, 就是一次从日常经验出发进行的科学探究. 学生在之前的学习中已掌握用“速度”这一物理量描述物体运动得快慢, 但在本章又将面临新问题: 他们会在比较自行车轮大小齿轮的转动快慢时产生不同的意见. 教师可以组织学生进行讨论交流, 引导他们发现真正的分歧点: 单一的速度概念表述不足以解释现有的物理现象, 而角量更适合用来表述圆周运动的一些特点. 于是角速度的概念应运而生.

科学态度与责任要素往往在教科书的文本内容中得到体现, 比如“生活中的圆周运动”一节提及: 离心运动产生的原因是合力不足以提供向心力, 这会导致日常生活中的一些危险现象(汽车打滑), 根据这种科学解释定下的规则可以保护生命安全(弯

道限速)^[4]. 这便在介绍“离心运动”这一知识点的同时体现了一定的科学态度. 对于这种与个别知识点相关联的要素, 研究者不妨在知能结构图中添加如图6所示的三角形标注, 以便在备课时加以注意, 在教学中适当渗透.

参考文献

- [1] 杰拉德·霍尔顿. 物理科学的概念与理论导论(上册)[M]. 北京: 人民教育出版社, 1983: 323-325, 292-293.
- [2] 阎金铎, 田世昆. 中学物理教学概论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1991: 38-42.
- [3] 中华人民共和国教育部. 普通高中物理课程标准(2017年版)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2018: 4-5.
- [4] 人民教育出版社, 课程教材研究所, 物理课程教材研究开发中心. 普通高中教科书物理必修第二册[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019: 38.

(上接第152页)

带来的困难, 既体现了命题专家的智慧, 又有利于学生直接利用结论进行求解.

参考文献

- [1] 赵坚. 电磁感应中一些容易引发疑惑问题的分析[J]. 物理通报, 2014, 35(5): 2-4.
- [2] 黄晶. 基于SOLO分类理论的教学实践与改进[J]. 教学月刊, 2014(11): 24-27.

其特征根为

$$\gamma = -\alpha \pm \beta$$

其中

$$\alpha = \frac{b}{2a} \quad \beta = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

当 $b^2 > 4ac$, $\frac{b^2}{4ac} > 1$ 时, 特征方程存在两实根, 分析如下.

$$\frac{b^2}{4ac} = \frac{\left[\frac{m(R+r)}{BLR} + CBL \right]^2}{4 \frac{mCr}{BL} \cdot \frac{BL}{R}} \geq \frac{4 \frac{m(R+r)}{BLR} CBL}{4 \frac{mCr}{BL} \frac{BL}{R}} = \frac{R+r}{r} > 1$$

即特征方程存在两实根.

由上述分析可知, 式(13)的解为

$$U = U_0 e^{(-\alpha-\beta)t} + U'_0 e^{(-\alpha+\beta)t} + \frac{mgR}{BL}$$

其中 U_0, U'_0 由初始条件决定, 考虑到初始时刻 $U = 0, \frac{dU}{dt} = 0$ (因为 $\frac{dU}{dt} \propto I_1$, 而初始时刻 $I_1 = 0$), 得到

$$U_0 + U'_0 + \frac{mgR}{BL} = 0$$

$$U_0 - U'_0 = 0$$

解得

$$U_0 = -\frac{-\alpha+\beta}{2\beta} \frac{mgR}{BL} U'_0 = -\frac{\alpha+\beta}{2\beta} \frac{mgR}{BL}$$

综上, 最后解的形式为

$$U = \frac{mgR}{BL} \left[1 - \frac{(-\alpha+\beta)e^{(-\alpha-\beta)t} + (\alpha+\beta)e^{(-\alpha+\beta)t}}{2\beta} \right]$$

附录:

文中式(15)微分方程的求解

$$\frac{mCr}{BL} \frac{d^2U}{dt^2} + \left[\frac{m(R+r)}{BLR} + CBL \right] \frac{dU}{dt} + \frac{BL}{R} U = mg$$

为二阶线性常系数微分方程, 其解由两部分构成.

一部分是非齐次方程的特解

$$U = \frac{mgR}{BL}$$

另一部分是下面齐次方程的特解.

$$\frac{mCr}{BL} \frac{d^2U}{dt^2} + \left[\frac{m(R+r)}{BLR} + CBL \right] \frac{dU}{dt} + \frac{BL}{R} U = 0$$

令

$$\frac{mCr}{BL} = a \quad \frac{m(R+r)}{BLR} + CBL = b \quad \frac{BL}{R} = c$$

则齐次方程可简写为

$$a \frac{d^2U}{dt^2} + b \frac{dU}{dt} + cU = 0$$

设其解的形式为

$$U = U_0 e^{\gamma t}$$

代入原方程可得特征方程

$$a\gamma^2 + b\gamma + c = 0$$