



盘曲链条升降运动分析*

芮云军 类淑国

(南京工业大学数理科学学院 江苏 南京 211816)

邵传智

(南京市溧水区教师发展中心 江苏 南京 211200)

(收稿日期:2022-07-09)

摘要:研究发现,静止于桌面足够长的盘曲链条,被竖直向上的恒力 F 拉起,链条将做上下升降运动,其周期最终为 $2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ (a 为平衡位置高度, g 为重力加速度). 链条的速度最大值和动能最大值没有同时出现,也并非在振动平衡位置. 能量损耗随着周期数的增加逐渐减小,最终损耗总量为拉力做功的 $\frac{1}{2}$. 该运动的实例可以通过链条在水中受到恒定浮力来展现.

关键词:盘曲链条; 竖直拉力; 升降运动; 能量损耗; 浮力

“能量守恒定律”教学时,链条上升或下落问题常常作为典型例题进行“错题分析”. 其中涉及恒力做功,势能和动能的变化,以及能量的损失. 当静止链条被竖直向上恒力 F 拉起时,文献[1-2]分析了链条从最初拉起到最高点这一过程,但是之后的链条运动与能量问题并未给出. 我们经过研究,发现这一问题是有意义的,这里与读者共享.

1 受力分析

图1和图2给出了链条的受力情况.

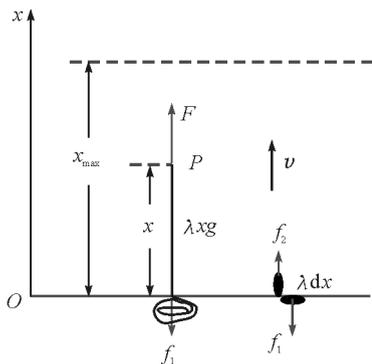


图1 链条上升受力分析示意图

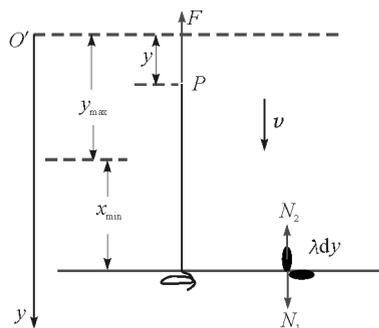


图2 链条下降受力分析示意图

需要注意的是,链条、绳索这类准一维柔性体在其方向上可以承受一定的张应力,却无法承受压应力^[3]. 上升过程中,建立坐标轴 Ox , P 端受力为 F , 链条距离桌面为 x , 则受重力为 λgx , λ 为线密度,链条由静止被拉起后的速度为 v , 链条 P 端所能上升的最大高度为 x_{\max} , 其动力学方程可以表示为

$$F - \lambda x g - f_1 = \lambda x \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

其中 $f_1 = \lambda v^2$ 为已动部分与未动部分的冲力,即张应力,可通过动量定理得到^[4]. f_1, f_2 为两相邻质元之间的作用力与反作用力. 而对于下降过程,建立坐

* 南京工业大学教改项目,项目编号:20191052.

标轴 Oy , 如图 2 所示. 链条从最高点下降距离为 y 时, 受到重力为 $\lambda(x_{\max} - y)g$, 链条与桌面碰撞前的速度为 v . 质量元 (λdy) 速度降为零的冲力来源于桌面, 大小为 $N_1 = N_2 = \lambda v^2$, 但是链条两质元之间没有压应力, 所以下降过程的牛顿第二定律, 可表示为

$$-F + \lambda(x_{\max} - y)g = \lambda(x_{\max} - y) \frac{dv}{dt} \quad (2)$$

另外, 上升到达的最大值 x_{\max} 为下降过程的起点 $y=0$; 下降到达的最大值 y_{\max} 为下一个上升过程的起点 x_{\min} .

2 振动图像

上升过程中, 求解一阶线性微分方程(1), 得到

$$v^2 = \frac{c}{x^2} + \frac{F}{\lambda} - \frac{2}{3}gx \quad (3)$$

当 $x=0$ 时, 速度为有限值, 则

$$c=0$$

令
$$a = \frac{F}{\lambda g}$$

第一个上升过程的方程为

$$v^2 = ag - \frac{2}{3}gx \quad (4)$$

可以计算出, 其上升的最大高度为 $x_{\max} = 1.5a$.

下降过程中, 式(2) 的解为

$$v^2 = 2gy + 2ag \ln \frac{x_{\max} - y}{x_{\max}} \quad (5)$$

当下落到最低点时 $y = y_{\max}$, $v=0$, 则有

$$\frac{y_{\max}}{a} + \ln\left(1 - \frac{y_{\max}}{x_{\max}}\right) = 0 \quad (6)$$

将第一个上升中的最高点 $x_{\max} = 1.5a$ 代入式(6), 得到 $y_{\max} = 0.874a$, 那么

$$\begin{aligned} x_{\min} &= x_{\max} - y_{\max} = \\ 1.5a - 0.874a &= 0.626a \end{aligned} \quad (7)$$

此时, $x_{\min} = 0.626a$ 为第二个上升过程中的最低点. 将其代入方程(3), 得到

$$c = -0.228 \ 3a^3 g$$

可得方程的另一解为

$$x_{\max} = 1.3a$$

因此, 根据方程(3) 可以计算出上升过程的最高点 x_{\max} , 而式(6) 与式(7) 可得下降的最低点 x_{\min} , 这样

每个升、降过程的时间(半周期) 为

$$t_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{ag}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{c}{\left(\frac{x}{a}\right)^2}}}} \quad (8)$$

$$t_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2ag}} \int_0^{y_{\max}} \frac{dy}{\sqrt{\frac{y}{a} + \ln\left(1 - \frac{y}{x_{\max}}\right)}} \quad (9)$$

表 1 给出了前面 9 个“半周期过程”, 奇数表示上升过程, 偶数表示下降过程. 随着升降运动次数的增加, 其半周期逐渐减小, 最终接近于 $3.14 \sqrt{\frac{a}{g}}$. 相应的振动图像如图 3 所示.

表 1 盘曲链条升降运动中, 提拉点 P 位置及振动周期

过程	起点 / ($\times a$)	终点 / ($\times a$)	半周期 / ($\times \sqrt{\frac{a}{g}}$)	周期 / ($\times \sqrt{\frac{a}{g}}$)
1	0	1.5	3.0	
2	1.5	0.626	3.154	6.204
3	0.626	1.3	3.105	
4	1.3	0.75	3.143	6.264
5	0.75	1.214	3.121	
6	1.214	0.813	3.118	6.240
7	0.813	1.166	3.122	
8	1.166	0.851	3.128	6.244
9	0.851	1.135	3.116	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$2n-1$	$1+\Delta$	$1-\Delta$	π	2π
$2n$	$1-\Delta$	$1+\Delta$	π	

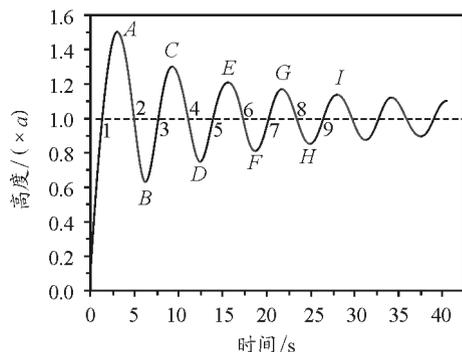


图 3 链条上下振动图, 虚线处为平衡位置

图中 A, B, …, 为各过程中, 端点 P 的最高点 x_{\max} 与最低点 x_{\min} , 虚线为其振动平衡位置, 因为此时拉力 F 与重力平衡, 故有 $a = \frac{F}{\lambda g}$. 随着振动周期增

加,在 a 附近升降位移 Δx 将非常小,链条近似于简谐振动,其微分方程为

$$-\lambda \Delta x g = \lambda a \frac{d^2 \Delta x}{dt^2} \quad (10)$$

其振动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$

3 速度与动能最大值

盘曲链条升降过程中,速度的最大值(用间接值 v_{\max}^2 表示)与动能的最大值 $E_{k\max}$,并没有出现在振动的平衡位置 $a = \frac{F}{\lambda g}$ 处.图4给出了链条速度与高度关系图,即式(3)与式(5)的数值模拟图.图中A, B, ... 为上升与下降过程的起点和终点,速度为零.速度最大值出现的位置与大小如表2所列.可以看出,上升过程中,速度最大值时链条 P 点不在 a 处,但会逐渐靠近平衡位置 a .如过程1,在 $x = 0$ 处;过程3,在 $x = 0.88a$ 处;过程5,在 $x = 0.94a$ 处.而下降过程中,速度的最大值均出现在平衡位置 $x = a$ 处.这正是链条升降过程中,质元之间有张应力,而无压应力的缘故.

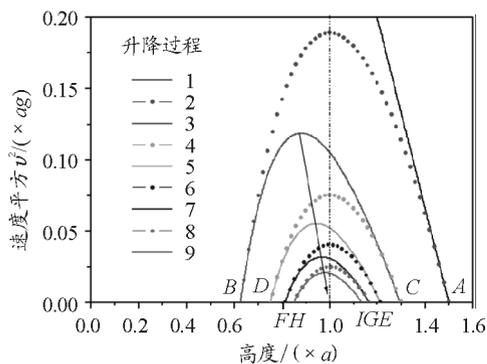


图4 速度平方 v^2 与提拉点 P 高度的关系

表2 链条 v^2 与 E_k 的最大值及相应的提拉点 P 位置

过程	v_{\max}^2		$E_{k\max}$	
	位置 / ($\times a$)	数值 / ($\times ag$)	位置 / ($\times a$)	数值 / ($\times \lambda ga^2$)
1	0	1.000	0.75	0.188
2	1.00	0.189	1.09	0.099
3	0.88	0.118	0.94	0.054
4	1.00	0.075	1.04	0.038
5	0.94	0.055	0.97	0.026

续表 2

过程	v_{\max}^2		$E_{k\max}$	
	位置 / ($\times a$)	数值 / ($\times ag$)	位置 / ($\times a$)	数值 / ($\times \lambda ga^2$)
6	1.00	0.040	1.02	0.020
7	0.97	1.032	0.98	0.015
8	1.00	0.025	1.01	0.012
9	0.98	0.020	0.99	0.010

对于链条的动能 $E_k = \frac{1}{2} M v^2$, 上升过程中,它与位置的函数关系为

$$E_{k(2n-1)} = \frac{1}{2} \lambda x v^2 \quad (11)$$

式中速度 v 由式(3)表示.

同样,在下降过程中,动能可表示为

$$E_{k(2n)} = \frac{1}{2} \lambda (x_{\max} - y) v^2 \quad (12)$$

式中速度 v 由式(5)表示.

图5为链条不同高度处的动能大小数值模拟图,其最大值的位置和大小如表2所示.可以看出,链条 $E_{k\max}$ 也没有出现在平衡位置 a 处,但随着周期数的增加,动能最大值的位置逐渐靠近 a 处.由于竖直方向运动的链条是变质量体系,所以对比 v_{\max}^2 与 $E_{k\max}$ 的位置,发现速度与动能的变化不同步.

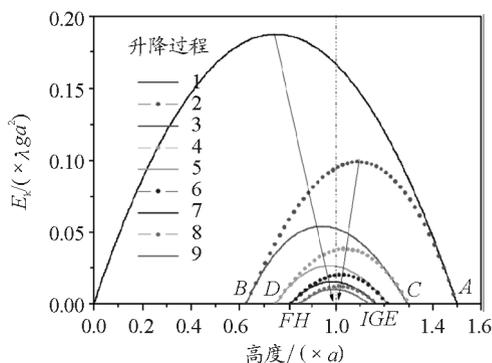


图5 动能 E_k 与提拉点 P 高度的关系

4 能量变化

应用“能量守恒定律”,链条运动过程中的能量损失就可以计算出来.由于链条是盘曲的,可以忽略其与桌面的摩擦力;不计空气阻力,能量损失可表示为

$$\Delta E = W_F - \Delta E_p - E_k \quad (13)$$

其中 E_k 为链条的动能,由式(11)、(12)给出,即前面图5所示.而 W_F 为竖直向上恒力做功, ΔE_p 为重力

势能的变化,如图6所示.上升过程中

$$W_F = F(x - x_{\min})$$

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} \lambda g(x^2 - x_{\min}^2)$$

下降过程中

$$W_F = F(y - 0) \quad \Delta E_p = \frac{1}{2} \lambda g(x_{\max}^2 - y^2)$$

可以看出,每个过程的 W_F 与 ΔE_p 如图中 A, B, \dots , 各点所标注的那样,沿着直线与抛物线的轨迹而变化.

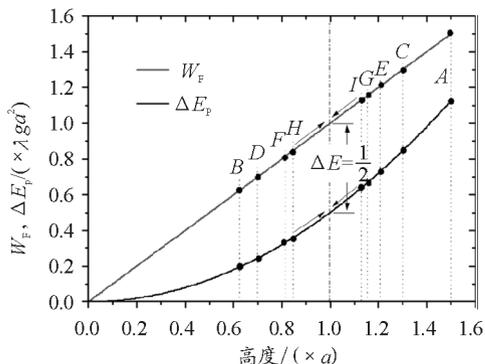


图6 W_F 及 ΔE_p 与提拉点 P 高度的关系

图7为根据式(13)计算的能量损失示意图.链条升降过程中能量损失,沿着图中曲线轨迹变化.每个过程损失的能量 ΔE 如表3所列.如第1过程, $\Delta E_1 = \frac{3}{8} \lambda g a^2$,表示从桌面拉起到 A 点的能量损失;第2过程, $\Delta E_2 = 0.055 \lambda g a^2$,表示 A 点到 B 点的能量损失.以后的过程能量损失逐渐减小,如图7所示.最后总能量损失(即 P 点从被拉起到链条运动停止在平衡位置 a 处时),计算结果为

$$\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 + \dots = \frac{1}{2} \lambda g a^2 \quad (14)$$

值得注意的是,链条运动中的能量损失仅仅由非弹性碰撞造成,也就是动能损失,即

$$\Delta E = \Delta E_k \quad (15)$$

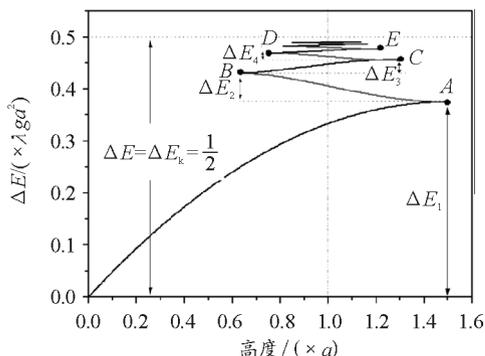


图7 ΔE 与提拉点 P 高度的关系

表3 链条升降过程中的能量损耗

过程	ΔE 式(13)/ ($\times \lambda g a^2$)	ΔE 总量/ ($\times \lambda g a^2$)	ΔE 式(15)/ ($\times \lambda g a^2$)
1	0.375 0	$\frac{1}{2}$	0.374 5
2	0.055 0		0.055 0
3	0.025 0		0.026 0
4	0.013 7		0.013 8
5	0.008 0		0.008 5
6	0.005 4		0.005 4
7	0.003 7		0.003 7
8	0.002 7		0.002 6
9	0.001 9		0.001 9
\vdots	\vdots		\vdots
2n	Δ	Δ	

上升过程中链条损失的动能来源于 dm 质量的链条由静止突然和体系 M (速度为 v) 一起运动,此过程动量守恒,有 $Mv = (M + dm)v'$. 因为 $M \gg dm$, 则拉动链条 dm 质量而损失的动能为^[4-5]

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} M v^2 - \frac{1}{2} (M + dm) v'^2 = \frac{1}{2} dm \cdot v^2$$

每个上升过程,能量损失为

$$\Delta E_{k(2n-1)} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{1}{2} \lambda dx \cdot v^2$$

式中速度 v 由式(3)表示.下降过程中,链条损失的动能来源于 dm 质量的链条与桌面发生非弹性碰撞,速度降为零

$$\Delta E = \frac{1}{2} dm \cdot v^2 - 0$$

所以每个下降过程,能量损失为

$$\Delta E_{k(2n)} = \int_0^{y_{\max}} \frac{1}{2} \lambda dy \cdot v^2$$

式中速度 v 由式(5)表示.由式(15)计算的数值解,与式(13)得到的结果完全相同,如图7所示.

其实,“能量损失总量为恒力做功的一半”的结论,可以通过“极限思维”法得到.链条被拉起后, W_F 有正有负, ΔE_p 也有正有负.但是由于动能损失,振幅逐渐减小,最终停止在平衡位置 a 处,此时

$$W_F = 1.0 \lambda g a^2 \quad \Delta E_p = 0.5 \lambda g a^2$$

因此

$$\Delta E = W_F - \Delta E_p - E_k = \frac{1}{2} \lambda g a^2$$

可见,在学生清晰了链条升降的物理图像,分析了受力情况的前提下,该结论不难得出。

5 实例展示

如图8所示,链条与鱼漂组成这个变质量运动系统,鱼漂可以提供向上的恒力(大小不变的浮力),可以看出,系统的平衡位置为 $a' = 59.5 \text{ cm}$, 根据平衡位置 a' 可以计算出运动周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{a'}{g}} = 1.54 \text{ s}$. 将鱼漂从 $1.5a'$ 处静止释放(在水中),得到的理论和实际运动轨迹,如图9所示. 理论曲线由于仅仅考虑链条拉起和下落时的碰撞动能损失,所以振幅衰减缓慢(之前的理论分析). 然而实际情况是,运动1.5个周期后很快就停止了,且周期增加到了 2.48 s . 这是因为鱼漂和链条在水中运动,粘滞阻力较大,系统能量很快耗散,表现为较强的阻尼振动. 实验还发现,增大鱼漂入水时的速度,并不能增加系统的升降运动次数,因为高速下,水的摩擦阻力更大,能量衰减更快. 有研究者将氢气球下挂细绳,模拟该变质量物体在大气环境下受恒力(氢气球浮力)的运动情况^[6]. 由于空气阻力很小,所以他们的实验得到了较多的振动次数(7次),很好地展现了欠阻尼振动. 我们的实验,虽然振动次数较少,但是已经可以观察到明显的“升降运动”,很好地展现了恒力作用下盘曲链条的运动状态. 对于理论与实际的差别,可以鼓励学生在式(1)中加入“粘滞阻力”项进行研究.

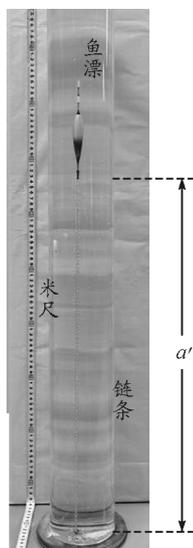


图8 实验装置

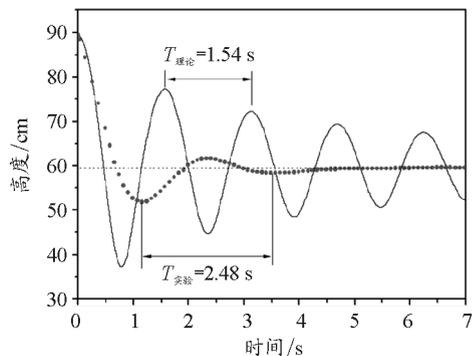


图9 理论与实验振动图像

6 总结

本文通过对盘曲链条的动力学研究,发现其受竖直向上恒力作用时,链条作“准周期性”的升降运动,振动周期近似于 $2\pi\sqrt{\frac{a'}{g}}$. 采用图像的形式,将升、降过程中的速度、动能、能量损失展现出来,让学生明白:(1) 链条是变质量体系,振动的速度与动能最大值并非出现在平衡位置处;(2) 链条中有张应力而无压应力,升、降过程的受力有区别;(3) 非弹性碰撞造成能量损失,损失总量可以通过“极限思维”分析出来;(4) 通过实例展现该系统的(实际)运动. 研究该体系,对促进学生物理过程分析,物理模型提炼,以及对现有问题深究能力的培养都具有现实意义,不失为一道“能量守恒定律”好例题.

参考文献

- [1] 金烈侯. 变质量物体运动动能损失的分析[J]. 物理教师, 1998, 19(9): 43-44.
- [2] 李尧阶. 巧用力的独立作用原理, 解决一类复杂的力学问题[J]. 物理教师, 2001, 22(1): 7-8.
- [3] 于同旭, 张文彬, 许腾, 等. 链条下落运动问题浅析[J]. 自然杂志, 2015, 37(1): 53-60.
- [4] 梁励芬. 关于盘卷链条落体运动的讨论[J]. 工科物理, 1995(2): 45-46.
- [5] 姚琨, 杨海彬, 姚陆锋, 等. 堆积链条下落过程中的机械能分析[J]. 物理与工程, 2021, 31(4): 34-36.
- [6] C Kodejska, L Richterek, J Riha. Buquoy's problem in an introductory physics course[J]. *Journal of Physics: Conference Series*, 2020(1512): 012003.