焦耳热如何分配

—— 对 2022 年高考全国甲卷理综第 20 题定量分析

彭定辉

（江西省南丰县第一中学　江西 抚州　344500）

（收稿日期：2022 - 07 - 10）

摘　要：对 2022 年高考全国甲卷理综第 20 题的“单杆＋电容＋电阻”情景问题，通过微分方程分析电阻 R 和导体棒的电流变化，并定量计算焦耳热及分配比例. 在求解过程中发现随时间指数衰减电流的焦耳热计算方式，还总结出将“单杆导轨”等效为电容器的方法.

关键词：“单杆＋电容＋电阻”模型；焦耳热；衰减电流；等效电容器

1　提出问题

“单杆导轨”是电磁感应的经典问题，能衍生诸多次级模型，如“单杆＋电阻”“单杆＋电容”“单杆＋外力”等[1-2]. 2022 年高考全国甲卷理综第 20 题不落窠臼，对常见模型进行延伸拓展，构建“单杆＋电容＋电阻”的情境问题，题目如下.

如图 1 所示，两根相互平行的光滑长直金属导轨固定在水平绝缘桌面上，在导轨的左端接入电容为 C 的电容器和阻值为 R 的电阻. 质量为 m、阻值也为 R 的导体棒 MN 静止于导轨上，与导轨垂直，且接触良好，导轨电阻忽略不计，整个系统处于方向竖直向下的匀强磁场中. 开始时，电容器所带的电荷量为 Q，合上开关 S 后（　　）

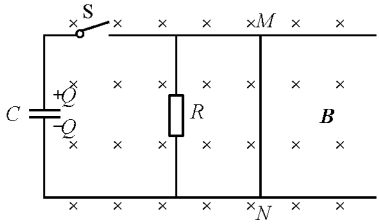

图 1　题目情境图

A. 通过导体棒 MN 电流的最大值为 $\dfrac{Q}{CR}$

B. 导体棒 MN 向右先加速、后匀速运动

C. 导体棒 MN 速度最大时所受的安培力也最大

D. 电阻 R 上产生的焦耳热大于导体棒 MN 上产生的焦耳热

该题参考答案为选项 A、D. 下面对此题做一般分析.

合上开关后电容器通过导体棒和电阻 R 放电，放电电流使导体棒在安培力作用下由静止开始向右加速运动，从而引起感应电动势和反向的感应电流. 可知开始时感应电流为零，导体棒的电流最大，并由 $Q=CU$ 和 $U=IR$ 得电流 $I=\dfrac{Q}{CR}$，选项 A 正确. 又由于电容器与电阻 R 及导体棒构成通路，最后各支路电流为零，导体棒会停下来，选项 B 错误. 当导体棒速度最大时加速度为零，安培力也为零，选项 C 错误. 而回路中的感应电流与导体棒的原电流（电容器放电电流）方向相反，与电阻 R 的原电流方向相同. 于是流过导体棒 MN 的总电流比电阻 R 的更小，两者阻值相同的情况下，显然导体棒产生的焦耳热更小，选项 D 正确.

这样分析仍存在疑虑：有没有可能电容器放完电时导体棒仍在向右运动，其产生的感应电流对电容器反向充电，然后如此反复，形成衰减振荡电流？此外，从能量角度来看，电容器原来存储的电能最终转化的焦耳热，在电阻 R 与导体棒之间是如何分配的，焦耳热的分配比例与导体棒的阻值有何关系？下面本文试图通过定量计算，对上述问题做出明确回答.

作者简介：彭定辉（1975 -　），男，中教一级，研究方向为中学物理竞赛和中学物理教学.

2　定量分析

2.1　方程求解

在原题条件上,改设导体棒阻值为 r,电容器初始电荷量为 Q_0,再假定导轨宽度为 L,匀强磁场的磁感应强度大小为 B,导体棒速度为 v,通过电容器、电阻和导体棒的电流分别 I、I_1、I_2,方向如图 2 所示.

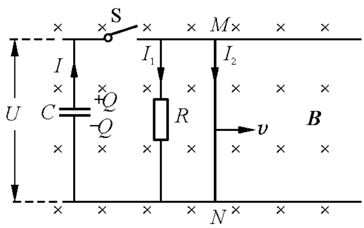

图 2　电路分析

对电阻 R,由 $Q=CU$ 和 $U=I_1R$ 可知其电流为

$$I_1=\frac{Q}{CR} \tag{1}$$

对导体棒,又由 $U=BLv-(-I_2r)$ 可知其电流为

$$I_2=\frac{Q}{Cr}-\frac{BLv}{r} \tag{2}$$

因 $I=I_1+I_2$,则电容器的电流为

$$I=\frac{Q}{Cr}\left(\frac{r}{R}+1\right)-\frac{BLv}{r} \tag{3}$$

由电容器放电电流

$$I=-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

有

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\frac{BLv}{r}-\frac{Q}{Cr}\left(\frac{r}{R}+1\right) \tag{4}$$

考虑导体棒在安培力作用下做变速运动,有

$$BI_2L=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

将式(2)代入,整理得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{BL}{mr}\left(\frac{Q}{C}-BLv\right) \tag{5}$$

观察到 $\frac{Q}{C}$ 与 BLv 量纲相同,故将式(4)、(5)中含 v 的项变换为 $C'BLv$,有

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\frac{C'BLv}{C'r}-\frac{Q}{Cr}\left(\frac{r}{R}+1\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}C'BLv}{\mathrm{d}t}=\frac{C'B^2L^2}{m}\left(\frac{Q}{Cr}-\frac{C'BLv}{C'r}\right)$$

对上式进行简化处理,取

$$\frac{C'B^2L^2}{m}=1$$

得系数

$$C'=\frac{m}{B^2L^2}$$

且令

$$q=C'BLv \qquad a=\frac{1}{Cr}$$

$$k=\frac{r}{R}+1 \qquad b=\frac{1}{C'r}=\frac{B^2L^2}{mr}$$

则上面两式写为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=bq-akQ \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=aQ-bq \tag{7}$$

由式(6)有

$$q=\frac{1}{b}\left(akQ+\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right)$$

代入式(7),整理得

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+(ak+b)\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+ab(k-1)Q=0$$

此二阶微分方程的特征方程为[3]

$$x^2+(ak+b)x+ab(k-1)=0$$

两实根为

$$x_{12}=-\frac{(ak+b)\pm\sqrt{(ak-b)^2+4ab}}{2}$$

令

$$\lambda_1=\frac{(ak+b)+\sqrt{(ak-b)^2+4ab}}{2}$$

$$\lambda_2=\frac{(ak+b)-\sqrt{(ak-b)^2+4ab}}{2}$$

易知 $\lambda_1>0$、$\lambda_2>0$,且有

$$\lambda_1+\lambda_2=ak+b \tag{8}$$

$$\lambda_1\lambda_2=ab(k-1) \tag{9}$$

则方程的通解为

$$Q=A_1\mathrm{e}^{-\lambda_1t}+A_2\mathrm{e}^{-\lambda_2t} \tag{10}$$

可见电荷量 Q 随时间指数衰减.式中 A_1、A_2 为待定系数,由

$$I=-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

有

$$I=\lambda_1A_1\mathrm{e}^{-\lambda_1t}+\lambda_2A_2\mathrm{e}^{-\lambda_2t}$$

当 $t=0$ 时,由题设和式(3)有

$$A_1+A_2=Q_0$$

$$\lambda_1A_1+\lambda_2A_2=akQ_0$$

可得

$$A_1=\frac{ak-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}Q_0 \qquad A_2=\frac{\lambda_1-ak}{\lambda_1-\lambda_2}Q_0$$

容易验算 $\lambda_1>ak>\lambda_2$，故有 $A_1>0$、$A_2>0$.

2.2　电流分析

由式(1)有

$$I_1=\frac{Q}{CR}=a(k-1)Q$$

可知电阻 R 的电流为

$$I_1=a(k-1)A_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}+a(k-1)A_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 t} \tag{11}$$

而通过电阻 R 的总电荷量为

$$Q_1=\int_0^{\infty}I_1\mathrm{d}t=\frac{a(k-1)}{\lambda_1\lambda_2}(A_1\lambda_2+A_2\lambda_1)=Q_0$$

联立式(6)、(10)得

$$q=\frac{ak-\lambda_1}{b}A_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}+\frac{ak-\lambda_2}{b}A_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$$

由式(2)有

$$I_2=\frac{Q}{Cr}-\frac{BLv}{r}=aQ-bq$$

可知导体棒的电流为

$$I_2=(a+\lambda_1-ak)A_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}+(a+\lambda_2-ak)A_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 t} \tag{12}$$

而通过导体棒的总电荷量为

$$Q_2=\int_0^{\infty}I_2\mathrm{d}t=0$$

发现电阻和导体棒的电流 I_1、I_2 也是随时间指数衰减，可用图像来直观表示其变化情况. 当导体棒阻值取 R 时，有

$$k=\frac{r}{R}+1=2$$

再令

$$a=\frac{1}{Cr}=3 \qquad b=\frac{B^2L^2}{mr}=2 \qquad Q_0=1$$

则有 $\lambda_1=7.16$，$\lambda_2=0.84$，$A_1=0.82$，$A_2=0.18$（各物理量均采用国际制单位）.

将上面数值代入式(11)、(12)，有

$$I_1=2.46\mathrm{e}^{-7.16t}+0.54\mathrm{e}^{-0.82t}$$

$$I_2=3.41\mathrm{e}^{-7.16t}-0.39\mathrm{e}^{-0.84t}$$

其 $I-t$ 图像如图 3 所示. 可见电流 I_2 减小到零后反向，再先增后减最终为零，导体棒也相应由加速变为减速，最后停止. 而电流 I_1 不会反向，始终衰减直至为零，没有像 RLC 电路那样出现振荡电流.

从图像上看，显然有 $I_1>|I_2|$，阻值相同的情况下，可知电阻 R 上产生的焦耳热大于导体棒 MN 上产生的焦耳热.

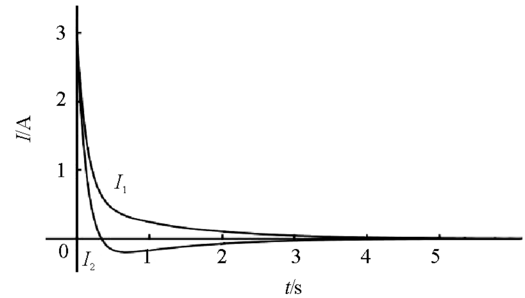

图 3　电流随时间变化

2.3　焦耳热的分配

观察式(11)、(12)，发现电流 I_1、I_2 均为 $I=C_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}+C_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$ 形式，下面来计算这种指数形式衰减电流产生的焦耳热.

$$E=\int_0^{\infty}I^2R\mathrm{d}t=R\left(\frac{C_1^2}{2\lambda_1}+\frac{2C_1C_2}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{C_2^2}{2\lambda_2}\right)$$

整理化简得

$$E=\frac{R}{2(\lambda_1+\lambda_2)}\left[(C_1+C_2)^2+\lambda_1\lambda_2\left(\frac{C_1}{\lambda_1}+\frac{C_2}{\lambda_2}\right)^2\right]$$

其中 $C_1+C_2=I_0$ 为初电流. 由

$$Q_{\mathrm{m}}=\int_0^{\infty}(C_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}+C_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 t})\mathrm{d}t=\frac{C_1}{\lambda_1}+\frac{C_2}{\lambda_2}$$

可知

$$\frac{C_1}{\lambda_1}+\frac{C_2}{\lambda_2}=Q_{\mathrm{m}}$$

为全过程通过的总电荷量，于是焦耳热为

$$E=\frac{R}{2(\lambda_1+\lambda_2)}(I_0^2+\lambda_1\lambda_2Q_{\mathrm{m}}^2) \tag{13}$$

由前面分析可知，$-\lambda_1$、$-\lambda_2$ 为特征方程的根，而 $\lambda_1+\lambda_2$、$\lambda_1\lambda_2$ 为二阶微分方程的系数，故对这种形式的电流只需列出微分方程，根据方程系数和 R、Q_{m}、I_0 便可计算其焦耳热，而不必具体求解方程.

对电阻 R，其初电流为

$$I_{10}=\frac{Q_0}{CR}=a(k-1)Q_0$$

通过总电荷量为 $Q_1=Q_0$，故其焦耳热为

$$E_1=\frac{R}{2(\lambda_1+\lambda_2)}[a^2(k-1)^2Q_0^2+\lambda_1\lambda_2Q_0^2]$$

代入式(8)、(9)，整理化简得

$$E_1=\frac{Q_0^2}{2C}\left(1-\frac{a}{ak+b}\right)$$

对导体棒，其初电流为

$$I_{20}=\frac{Q_0}{Cr}-\frac{BLv_0}{r}=aQ_0$$

通过总电荷量为零，故其焦耳热为

$$E_2=\frac{r}{2(\lambda_1+\lambda_2)}a^2Q_0^2$$

同样整理化简得

$$E_2=\frac{Q_0^2}{2C}\frac{a}{ak+b}$$

最后,电阻 R 与导体棒上产生的焦耳热之比为

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{r}{R}+\frac{B^2L^2C}{m}$$

无论电容器电容、导体棒质量等取何值,当 $r=R$ 时,$\frac{E_1}{E_2}>1$ 总成立.

3　等效方法

在定量求解过程发现,通过电阻 R 的总电荷量 $Q_1=Q_0$ 为电容器初始总电荷量,而通过导体棒的总电荷量 $Q_2=0$,仿佛导体棒是断路,全部电荷都经由电阻 R 流走;另外导体棒在轨道上先加速后减速时,电流先从 M 流向 N 再反向从 N 流向 M,其过程类似电容器先充电再放电;而且在方程化简时,用 $C'=\frac{m}{B^2L^2}$、$q=C'BLv$ 来代换,也相当于将导体棒的相关物理量转化为电容器的对应物理量.这很容易联想到把“单杆导轨”等效为电容器,下面对此作出证明.

考虑质量为 m 的导体棒在宽度为 L 的水平光滑轨道上做减速运动(加速运动也是一样的).设匀强磁场的磁感应强度大小为 B,方向竖直向下,导体棒向右切割的速度为 v,其电流大小为 I,如图 4(a) 所示.

由牛顿第二定律可知

$$BIL=-m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

根据量纲进行公式变形

$$I=-\frac{m}{C'B^2L^2}\frac{\mathrm{d}C'BLv}{\mathrm{d}t}$$

将上式与电容器放电电流

$$I=-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

对比,有

$$Q'=C'BLv \tag{14}$$

$$C'=\frac{m}{B^2L^2} \tag{15}$$

如图 4(b) 所示,将导体棒等效为电容器时,其存储电荷量为式(14),电容大小为式(15).根据电容公式 $Q'=C'U$,易知等效电容器的电压为导体棒产生的感应电动势 $U=BLv$.还可验证,导体棒的动能等效为电容器存储的电能,即

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{Q'^2}{2C'}$$

而由式(14)、(15)可得 $mv=BLQ'$,即导体棒的动量可对应电容器的电荷量,动量变化意味着电荷量变化,动量守恒意味着电荷量守恒.

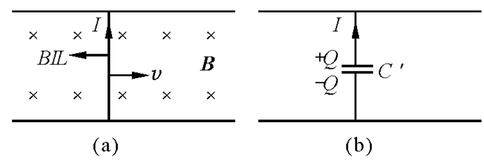

图 4　导体棒切割磁感线等效为一个电容器

于是可将高考原题中的导体棒等效为与一个电容器和电阻 r 串联的 RC 电路[4],把电磁感应的“单杆＋电容＋电阻”模型转化为电路问题.该等效电路如图 5 所示,电路左边部分为 RC 并联,右边部分为 RC 串联,可称为双 RC 电路.如此,电阻 R 与导体棒上产生的焦耳热之比可写成与双 RC 电路有关的最简形式 $\frac{E_1}{E_2}=\frac{r}{R}+\frac{C}{C'}$.

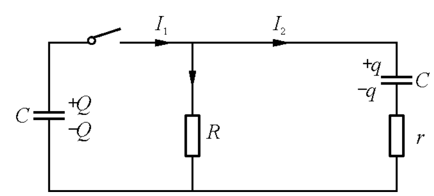

图 5　原题等效电路

可见,焦耳热在电阻 R 与导体棒之间的分配比例仅由等效的双 RC 电路结构决定.

4　结束语

本文通过求解微分方程,分析 2022 年高考全国甲卷理综第 20 题中的电流变化,得出电阻 R 与导体棒产生焦耳热的定量关系.此外,本文对 $I=C_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}+C_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$ 形式的衰减电流提出了焦耳热的快速计算方式,总结了导体棒的等效电容方法,为“单杆＋负载”的系列问题提供了新视角,具有一定参考价值.

参 考 文 献

[1] 杨学云.浅析电磁感应“单杆导轨”模型中的基本规律[J].物理教师,2019,40(8):82－86.

[2] 邓贤彬.电磁感应之“单杆＋导轨＋负载”模型研究[J].中学生理科应试,2022(3):21－26.

[3] 文丽,吴良大.高等数学(第三册)[M].北京:北京大学出版社,2004:280－283.

[4] 梁灿彬,秦光戎,梁竹健.普通物理学教程 电磁学[M].北京:高等教育出版社,2018:209－211.