篮球运动中的几个力学问题

岳国联
（六盘水市教育科学研究院　贵州 六盘水　553000）
黄绍书
（六盘水市第 23 中学　贵州 六盘水　553004）

（收稿日期：2022－07－10）

摘　要：计算了篮球的转动惯量，并由此结合静摩擦力对篮球的冲量矩作用，计算分析了运球行走过程中影响篮球转动角速度变化的根本原因，还计算分析了水平抛出的篮球自由弹跳过程中重力势能转化为转动动能的情况.

关键词：转动惯量；冲量矩；动量矩变化；转动动能；滚动动能

篮球可以看成是质量均匀分布的球壳，虽然其形变尺度比较显著，但在一些特定运动过程中，是可以从刚体或准刚体的角度进行分析的. 篮球运动过程是比较复杂的，往往既有平动，又有转动. 篮球运动是最为普及的体育健身项目之一，这里来讨论分析一下篮球运动中的几个力学问题.

1　转动惯量

根据

$$J=\int_{r_0}^{r_s} r^2\,\mathrm{d}m \tag{1}$$

可知，求刚体的转动惯量，关键是结合实际刚体模型确定 3 个要素[1]，即刚体质元 $\mathrm{d}m$ 的表示式，质元 $\mathrm{d}m$ 到转轴的距离 r 的表示式，积分的下限 r_0 和上限 r_s 也就是积分范围. 对于如图 1 所示的篮球，取其上半部来分析.

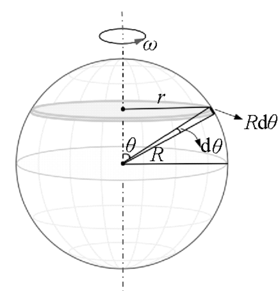

图 1　求篮球的转动惯量

半径为 r 处的圆环，有

$$r=R\sin\theta \tag{2}$$

零，则 Δh 不为零，代入大气压强值（1 atm 使水柱升高 10.3 m），发现 Δh 很大. 若 $\frac{h_1}{h_2}=0.2\sim0.3$，此值也有 2 ～ 3 m 甚至更大，而实验所用的容器无法达到此高度，所以浮沉子一直处于临界位置以上，即未达到发生不可逆现象的条件. 所以，若要在现有实验条件下观察到不可逆现象发生，浮沉子的初始位置就必须与液面齐平或与液面极其接近.

4　结论

通过上述理论分析和实验数据结果表明：

（1）浮沉子下沉后只有减压才能使之在水下达到受力平衡位置. 产生不可逆现象的根本原因为过度放压.

（2）浮沉子的自身参数（质量 m、截面积 S）是通过影响液面以下气柱高度 h_2 进而影响临界位置的深度.

参 考 文 献

[1] Roberto De Luca，Salvatore Ganci. A lot of good physics in the Cartesian diver[J]. PHYSICS EDUCATIONS，2011，46(5)：528－532.

[2] Nazir Amir，R Subramaniam. Making a fun Cartesian diver：a simple project to engage kinaesthetic learners[J]. PHYSICS EDUCATIONS，2007，42(5)：478－480.

[3] 常建，丁志勇.“浮沉子”水下平衡的定量探究[J]. 物理教学探讨，2011，29(9)：56－57.

[4] 黄淑清，聂宜如，申先甲. 热学教程[M]. 北京：高等教育出版社，1985.

$$\mathrm{d}m=\frac{m}{4\pi R^{2}}2\pi rR\,\mathrm{d}\theta \tag{3}$$

积分范围是 $0\sim\frac{\pi}{2}$. 考虑到篮球整体,容易得到其转动惯量为

$$J=\int_{r_0}^{r_s} r^{2}\,\mathrm{d}m=$$

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}R^{2}\sin^{2}\theta\,\frac{m}{4\pi R^{2}}\cdot 2\pi rR\,\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}mR^{2} \tag{4}$$

以上各式中,m 均为篮球质量(下同),R 均为篮球半径(下同).

顺便说明,若对于实心均匀球体的转动惯量,可以借助均匀圆盘对其对称轴的转动惯量公式并结合图 1 所示的图示来进行分析. 这样,半径为 r 处的圆盘的转动惯量元为

$$\mathrm{d}J=\frac{1}{2}r^{2}\,\mathrm{d}m \tag{5}$$

而

$$r=R\sin\theta \tag{6}$$

$$\mathrm{d}m=\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^{3}}\pi r^{2}(\sin\theta R\,\mathrm{d}\theta)=$$

$$\frac{3}{4}m\sin^{3}\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{7}$$

所以,实心均匀球体的转动惯量为

$$J=\int \mathrm{d}J=\int\frac{1}{2}r^{2}\,\mathrm{d}m=$$

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}R^{2}\sin^{2}\theta\cdot\frac{3}{4}m\sin^{3}\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{2}{5}mR^{2} \tag{8}$$

说明一下,这里在求解篮球和均匀实心球体的转动惯量过程中的积分运算时,都直接应用了

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n}\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n}\theta\,\mathrm{d}\theta=$$

$$\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\,\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2} & (n\ \text{为偶数})\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\,\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3} & (n\ \text{为奇数})\end{cases} \tag{9}$$

这个重要的数学公式.

2　转动角速度及其变化

在运球行走中,篮球与地面碰撞的瞬间,由于地面的静摩擦力对篮球的瞬时切向冲量矩,导致篮球旋转或改变篮球的旋转状况. 如图 2 所示,篮球具有水平平动速度 v_c,与地面碰撞瞬间受到地面沿水平方向的静摩擦力 f 和竖直方向的作用力 F_n(地面弹力和重力的矢量和)的共同作用. 若篮球与地面的第一次碰撞使篮球获得绕水平对称轴(直径)转动的角速度 ω_1,设篮球与地面的作用时间为 Δt,那么

$$fR\Delta t=J\omega_1 \tag{10}$$

即摩擦力对篮球的冲量矩等于篮球的动量矩增量. 所以

$$\omega_1=\frac{fR\Delta t}{J} \tag{11}$$

将式(4) 代入式(10),得

$$\omega_1=\frac{3f\Delta t}{2mR} \tag{12}$$

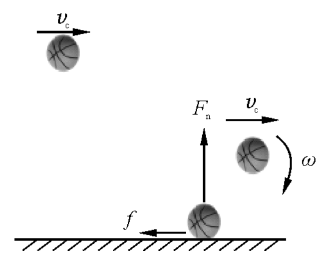

图 2　切向冲量矩使篮球旋转

篮球每次与地面碰撞,都会受到地面静摩擦力的切向冲量矩. 因此,篮球的转速原则上会随着运球行走过程中(设手每次对篮球的作用力均保持竖直向下)篮球与地面碰撞次数的增加而增大. 如果篮球每次与地面碰撞过程受力情况都相同,那么,第 n 次碰撞后篮球的角速度将变为

$$\omega_n=n\omega_1=\frac{3nf\Delta t}{2mR}\qquad(n=1,2,3,\cdots) \tag{13}$$

在实际情况下,由于空气阻力作用等多重因素,篮球的转动角速度增大到一定程度后就不会继续增大了.

一般地,有

$$\begin{cases}0<f\leqslant f_{\mathrm{m}}\\ f_{\mathrm{m}}=\mu_{\mathrm{m}}F_{\mathrm{n}}\\ F_{\mathrm{n}}=kmg\end{cases} \tag{14}$$

式中 f_{m} 为最大静摩擦力,μ_{m} 为最大静摩擦因数.

当篮球的水平平动速度和竖直平动速度都比较大时,篮球与地面碰撞的过程中,地面对篮球竖直方向的作用力 F_{n} 和静摩擦力 f 都会很大,且静摩擦力可达到最大静摩擦力 f_{m}. 这时,转动角速度也是最大的,可能达到最大值. 因此,结合式(14),可将式(13) 改写为

$$\omega_{m(n)}=n\omega_{m(1)}=$$

$$\frac{3n\mu_{\mathrm{m}}kg\Delta t}{2R}\qquad(n=1,2,3,\cdots) \tag{15}$$

从式(15)可以看出,运球行走过程中,篮球转动的最大角速度与篮球的质量无关.

3　机械能的转化

假定篮球以平动速度 v_c 从某一高度 h_0 处无转动地水平抛出,让篮球只在重力和地面作用力的作用下运动.篮球初始时刻的机械能可表示为

$$E=\frac{1}{2}mv_c^2+mgh_0 \tag{16}$$

与地面第一次碰撞后获得转动角速度 ω_1.那么,根据机械能守恒定律,这时的机械能可表示为

$$E=\frac{1}{2}m(v_c^2+v_{竖直}^2)+\frac{1}{2}J\omega_1^2 \tag{17}$$

其中,$J=\frac{2}{3}mR^2$(下同).这一过程中,篮球的重力势能一部分转化为转动动能,一部分转化为竖直方向的平动动能.当篮球第一次反弹达到某一最高位置 h_1 时,其机械能表示式为

$$E=\frac{1}{2}mv_c^2+mgh_1+\frac{1}{2}J\omega_1^2 \tag{18}$$

根据前述分析,以后篮球每次碰撞,其转动角速度都将增大.仍假定每次碰撞过程篮球的受力情况都相同,那么,根据式(13),第 n 次碰撞后篮球的角速度为 $n\omega_1$.因此,篮球第 n 次反弹达到某一最高位置 h_n 时,其机械能表示式为

$$E=\frac{1}{2}mv_c^2+mgh_n+\frac{1}{2}J\omega_n^2=\frac{1}{2}mv_c^2+mgh_n+\frac{1}{2}n^2J\omega_1^2 \tag{19}$$

随着碰撞次数 n 的逐次增加,反弹最大高度 h_n 将逐次减小,而转动角速度 ω_n 将逐次增大.当 h_n 减小到零时,ω_n 达到最大值 ω_m,这时机械能表示式为

$$E=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}J\omega_m^2 \tag{20}$$

显然,这实际就是刚体滚动动能表示式,说明这时篮球将在地面上做滚动前进.根据式(16)和式(20)整理并将 $J=\frac{2}{3}mR^2$ 代入,容易得出篮球转动的最大角速度为

$$\omega_m=\sqrt{\frac{2mgh_0}{J}}=\frac{\sqrt{3gh_0}}{R} \tag{21}$$

从式(21)可以看出,篮球的初始位置越高,篮球的半径越小,最终获得的转动角速度就越大.需要说明,式(21)与式(15)的意义是不尽相同的.

综上可以认为:篮球只在重力和地面作用向前自由弹跳的过程,实际就是重力势能逐次转化为转动动能的过程.

参考文献

[1] 缪钟英,罗启蕙.力学问题研究[M].合肥:中国科学技术大学出版社,2018:238-243.

Several Mechanics Issues in Basketball Sports

YUE Guolian
(Liupanshui Education Science Research Institute, Liupanshui, Guizhou 553000)
HUANG Shaoshu
(Liupanshui No. 23 Middle School, Liupanshui, Guizhou 553004)

Abstract: The moment of inertia of the basketball is calculated, and combined with the effect of the static friction force on the basketball's moment of impulse, the fundamental reasons for the change of the basketball's rotational angular velocity during the dribbling process are calculated and analyzed, and the free bouncing of the basketball thrown horizontally is calculated and analyzed. The conversion of gravitational potential energy into rotational kinetic energy during the process.

Key words: moment of inertia; moment of impulse; change of moment of momentum; rotational kinetic energy; rolling kinetic energy