

# 用单摆测量液体粘滞系数的实验设计与讨论<sup>\*</sup>

张声遥 曾志强 柳福提 宛俊杰 陈鹏

(宜宾学院理学部 四川 宜宾 644000)

(收稿日期:2022-07-21)

**摘要:**基于单摆的阻尼振动设计了一种新颖的方案来测量液体粘滞系数,对实验原理与实验过程进行了详细阐述,以空气、水和菜籽油作为被测对象进行了实验,测出常温下空气、水和菜籽油的粘滞系数分别为  $8.78 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 、 $2.30 \times 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  和  $1.06 \times 10^{-1} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 。该方案既可解决“落球法”测液体粘滞系数实验的不足,也可以生动直观地显示液体的粘滞阻力对小球运动的影响,加深学生对物理概念与规律的理解,培养学生的创新意识与能力。

**关键词:**液体粘滞系数;单摆;阻尼振动

液体流动时,平行于流动方向各层流体的速度如有不同,各层之间就有摩擦力产生,称为粘滞力。液体的这种性质称为液体的粘性。液体的粘滞系数是表征液体粘滞力强弱的重要参数。粘滞力只有在液体内存在相对运动时才表现出来,通常采用“落球法”来测量液体的粘滞系数<sup>[1]</sup>。“落球法”利用小球在液体中达到匀速运动时所受粘滞力与浮力、重力的平衡关系以及斯托克斯公式  $F = -6\pi r\eta v$ ,只要测量小球的收尾速度、直径、密度及液体的密度等量即可测量液体的粘滞系数,原理简单。但实验时小球下落过程时间较短,很难保证小球达到匀速运动,要重复实验取出小球又很不方便,容易产生油液浪费与油污。文献[2-6]提出利用阻尼振动来测量空气的粘滞系数并进行了实验与讨论,受其启发,本文利用单摆在液体中的阻尼振动来测量液体粘滞系数,既可解决上述“落球法”测液体粘滞系数实验的不足,也可以生动直观地显示液体的粘滞阻力对小球运动的影响,加深学生对物理概念与规律的理解,培养学生的创新意识与能力。

## 1 实验原理

如图1所示,将一单摆置入待测液体中,使单摆偏离平衡位置一定角度,并在无初速度的状态释放,

单摆将在液体中来回摆动,如同在空气中一样。

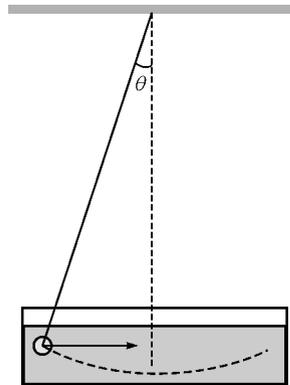


图1 单摆测量液体粘滞系数实验的设计原理图

由于液体的粘性,单摆在摆动过程中将会受到液体粘滞阻力的作用。设小球的半径和运动速度分别为  $r$  和  $v$ ,则小球在流体中所受的粘滞阻力可写为

$$F = -6\pi r\eta v \quad (1)$$

其中比例系数  $\eta$  为粘滞系数,负号表示粘滞阻力的方向和小球运动的速度方向相反。根据图1的受力分析,小球还受到重力和摆线拉力的作用,其受到的合外力矩为

$$M = -(mg\theta + 6\pi r\eta v)l \quad (2)$$

其中  $m$  表示小球的质量, $g$  是重力加速度, $\theta$  是摆线偏离竖直方向的角度, $l$  是摆长。根据转动定律可得单摆的运动方程为

<sup>\*</sup> 宜宾学院应用型示范课程力学建设项目,项目编号:XYYSFKC202008;四川省一流本科课程热学建设项目,项目编号:SYLKC202102;宜宾学院教学改革项目,项目编号:JGZ201809。

$$-(mg\theta + 6\pi r\eta v) = J\ddot{\theta} \quad (3)$$

式中  $J$  是小球对悬挂点的转动惯量,  $\ddot{\theta}$  是单摆的角加速度. 将表达式  $J = ml^2$  和  $v = l\dot{\theta}$  代入上式并整理可得

$$m\ddot{\theta} + 6\pi r\eta\dot{\theta} + \frac{mg}{l}\theta = 0 \quad (4)$$

其中  $\dot{\theta}$  是单摆的角速度.

令

$$c = 6\pi r\eta$$

$$k = \frac{mg}{l}$$

则式(4)可以变为

$$m\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\theta = 0 \quad (5)$$

再将表达式  $2\delta = \frac{c}{m}$  和  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  代入上式, 则有

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad (6)$$

此方程的解有 3 种情况.

(1) 若  $\delta < \omega_0$ , 方程的解为

$$\theta(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (7)$$

其中  $A$  是振幅,  $t$  表示时间,  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  为单摆振荡的角频率,  $\varphi_0$  为振荡的初相位. 此时单摆将在平衡位置附近做简谐振动, 但是其振幅却在随时间减少, 这种情况称为欠阻尼振动.

(2) 若  $\delta > \omega_0$ , 方程的解为

$$\theta(t) = c_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} \quad (8)$$

这种情况称为过阻尼振动.

(3) 若  $\delta = \omega_0$ , 方程的解为

$$\theta(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\delta t} \quad (9)$$

称为临界阻尼振动.

在本实验中, 单摆的运动是欠阻尼运动, 所以其运动方程的形式应为方程(7). 而且实验中单摆无初速度释放, 可知  $\varphi_0 = 0$  和  $A = \theta_0$ , 其中  $\theta_0$  为单摆开始摆动时的初始角位移. 因此可得单摆的振动方程为

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\delta t} \cos \omega t \quad (10)$$

根据此公式, 可知角振幅随时间变化关系为

$$\theta_A(t) = \theta_0 e^{-\delta t}$$

当  $t = nT$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 时, 有

$$\theta_A(nT) = \theta_0 e^{-\delta n T} \quad (11)$$

由此可得

$$\ln \frac{\theta_0}{\theta_A} = \delta n T \quad (12)$$

可见  $\ln \frac{\theta_0}{\theta_A}$  与  $n$  成正比. 因此通过实验测量单摆的周期和角振幅  $\theta_A$  随周期次数  $n$  的变化关系, 再对数据进行线性拟合, 根据斜率即可求  $\delta$ , 进一步根据公式

$$\eta = \frac{m\delta}{3\pi r} \quad (13)$$

可求出液体的粘滞系数  $\eta$ .

## 2 实验设计与实现

实验装置原理图如图 2 所示, 将小球置入水槽之中并向水槽中灌注待测液体直到小球浸没其中. 然后让小球从初始角度  $\theta_0$  处静止释放, 在  $\theta \leq 5^\circ$  范围内进行摆动, 用秒表测量  $n$  个周期的时间, 求出振动周期  $T$ , 同时用摄像机记录下小球从摆动到静止的全过程. 由于液体的阻尼, 单摆的振幅将按照式(7) 随时间减小. 根据摄像图片从单摆支架上的角度尺读出单摆振动  $n$  个周期之后的角振幅  $\theta_A$ , 计算出  $\ln \frac{\theta_0}{\theta_A}$ , 并绘制  $\ln \frac{\theta_0}{\theta_A}$  与  $n$  的关系曲线, 并对曲线进行线性拟合, 求出直线的斜率, 再求液体的粘滞系数  $\eta$ . 实验中小球的直径和质量分别用螺旋测微器和电子秤测量, 单摆的摆长则用卷尺测量. 实验中使用的设备实物图展示在图 3 之中.

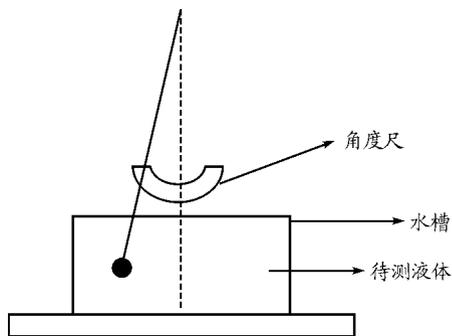


图 2 实验装置原理图

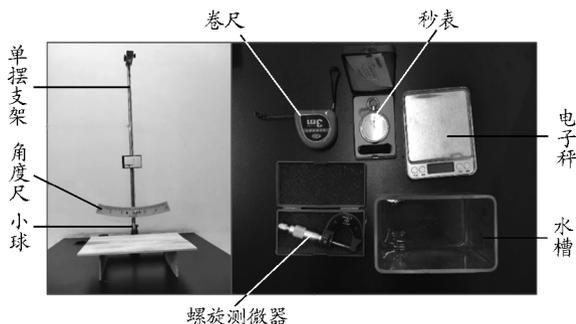


图 3 实验装置的实物图

### 3 实验结果

为验证以上论述的实验设计,我们测量了空气、水和菜籽油的粘滞系数.首先,实验测得小球的直径  $d = 16.906 \text{ mm}$  和质量为  $m = 16 \text{ g}$ .

#### 3.1 空气的粘滞系数测量

单摆在空气中摆动,由于空气粘滞阻力的作用,其振幅会不断减小.实验测得单摆的角振幅随周期的变化如表1所示.根据表1的数据以次数  $n$  为横坐标,以  $\ln \frac{\theta_0}{\theta_A}$  为纵坐标,进行线性拟合得到如图4所示的直线.图4中的数据 displays  $\ln \frac{\theta_0}{\theta_A}$  与  $n$  具有很好的线性关系,与理论推导一致.图中拟合直线的斜率为  $k = \delta T = 0.00696$ ,同时测得单摆的振动周期  $T$  为  $1.59 \text{ s}$ .将测量数据代入式(13)计算得到空气的粘滞系数  $\eta = 8.78 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .

表1 空气中单摆的角振幅随周期的变化关系

周期次数 $n$	角振幅 $\theta_A / (^\circ)$	$\ln \frac{\theta_0}{\theta_A}$
0	4.7	0
10	4.4	0.066
20	4.1	0.14
30	3.9	0.19
40	3.6	0.27
50	3.4	0.32
60	3.2	0.38
70	2.9	0.48
80	2.7	0.55
90	2.5	0.63

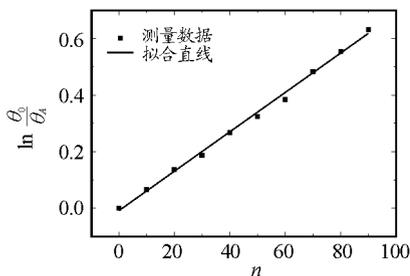


图4 空气中单摆的  $L_n \frac{\theta_0}{\theta_A} - n$  线性拟合

#### 3.2 水的粘滞系数测量

将单摆置入水中进行阻尼摆动,测得单摆的角振幅随周期的变化数据如表2所示.将表2数据绘

于图5中可以看到数据具有明显的线性关系.同样利用线性拟合可以得到直线斜率为  $k = \delta T = 0.2$ ,同时测得摆动周期  $T = 1.75 \text{ s}$ ,根据公式(13)算出水的粘滞系数为  $\eta = 2.30 \times 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .

表2 水的粘滞系数测量数据

周期次数 $n$	角振幅 $\theta_A / (^\circ)$	$\ln \frac{\theta_0}{\theta_A}$
0	2.8	0
1	2.0	0.34
2	1.5	0.62
3	1.3	0.77
4	1.1	0.9
5	0.9	1.1
6	0.8	1.3
7	0.6	1.5
8	0.5	1.7

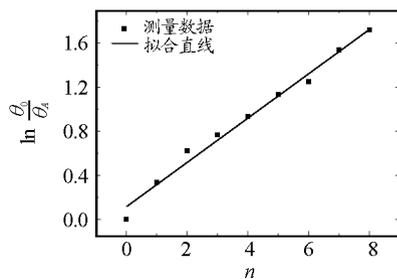


图5 水中单摆的  $L_n \frac{\theta_0}{\theta_A} - n$  线性拟合

#### 3.3 菜籽油的粘滞系数测量

如上同理,利用单摆对菜籽油的粘滞系数也进行了测量.测量数据如表3所示.表3中数据绘于图6中,拟合后的图线展示出良好的线性关系.数据拟合直线的斜率为  $k = \delta T = 0.98$ ,同时测得摆动周期  $T = 1.85 \text{ s}$ ,由此可以算出菜籽油的粘滞系数为  $\eta = 1.06 \times 10^{-1} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .

表3 菜籽油的粘滞系数测量数据

周期次数 $n$	角振幅 $\theta_A / (^\circ)$	$\ln \frac{\theta_0}{\theta_A}$
0	4.8	0
1	1.5	1.2
2	0.5	2.3
3	0.2	3.2
4	0.1	3.9

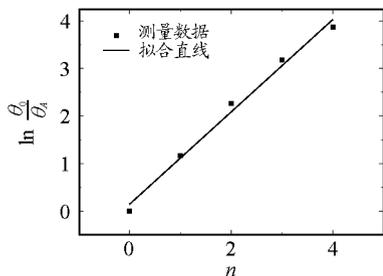


图6 菜籽油中单摆的  $L_n \frac{\theta_0}{\theta_A} - n$  线性拟合

## 4 实验结果讨论

### 4.1 实验结果不确定度计算

通过计算测量值的不确定度,可以判断实验结果的准确性.从式(13)可以看出粘滞系数测量的不确定度由  $m$ 、 $r$  和  $\delta$  决定.其中  $\delta$  又与角振幅随周期变化关系的拟合直线的斜率  $k$  与单摆周期  $T$  的测量值有关.根据误差理论, $m$ 、 $r$  和  $T$  的测量值的不确定度可由下式决定

$$u = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \quad (14)$$

其中  $\Delta$  表示仪器的最小刻度值.因此根据电子秤、螺旋测微器和秒表的最小刻度可以计算  $m$ 、 $r$  和  $T$  的测量值的不确定度. $k$  的不确定度计算公式为

$$u_k = \sqrt{\frac{\sum_i v_i^2}{(j-2) \sum_i (n_i - \bar{n})^2}} \quad (15)$$

其中  $j$  表示测量次数; $n_i$  表示第  $i$  次测量的周期次数; $\bar{n}$  是周期次数平均值; $\sum_i v_i^2$  表示残差的平方和,

即  $v_i^2 = \ln \frac{\theta_0}{\theta_{A,i}} - kn_i$ .根据前面的计算结果可以计算

粘滞系数的不确定度为

$$u_\eta = \frac{k}{3\pi Tr} u_m - \frac{mk}{3\pi T^2 r} u_r - \frac{mk}{3\pi Tr^2} u_r + \frac{1}{3\pi Tr} u_k \quad (16)$$

其中  $u_m$ 、 $u_r$  和  $u_T$  分别表示  $m$ 、 $r$  和  $T$  的不确定度.根据式(15)~(16)可以计算出空气、水和菜籽油的粘滞系数测量值的不确定度分别为  $4 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 、 $1.53 \times 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  和  $5.50 \times 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .从计算结果

看菜籽油的粘滞系数测量误差相比于空气和水更小,因为菜籽油的粘滞系数更大.

### 4.2 实验结果与传统测量结果的比较

以上实验结果显示,利用单摆的阻尼振动测得室温下空气、水和菜籽油的粘滞系数分别为  $8.78 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 、 $2.30 \times 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  和  $1.06 \times 10^{-1} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .而依据传统落球法测得水和菜籽油的粘滞系数分别为  $2.2 \times 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  和  $1.08 \times 10^{-1} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,其中空气的粘滞系数无法用落球法测量.比较两种方法的测量值可以看出,两种方法在精度和误差上相当,且随着液体粘度的增加,两种方法的测量结果趋于一致.通过查阅文献得知在室温下水的粘滞系数的标准值为  $1.01 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,而菜籽油大约为  $5 \times 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ <sup>[7]</sup>.因此,不管是用单摆还是落球法测量都比标准值要大.原因之一是摆线系在铁架的一端摆动过程中有附加摩擦力、以及细线与空气之间粘滞力的存在,引起测量数据增大;另一方面是实验中所测液体的粘滞系数相对较小,导致湍流容易影响小球的运动,所以实验结果出现了一些误差.

## 5 总结

本文设计了利用单摆的阻尼振动来测量液体粘滞系数的实验方案,并以空气、水和菜籽油作为被测对象进行了实验,测出了室温下空气、水和菜籽油的粘滞系数.该方法在精度上与传统方法相当,且操作更简单,不会因为重复取出小球而产生油液浪费与污染.而且,与传统方法比较,该方法具有能测量气体粘滞系数的优点.此外在实验中观察到单摆在液体中通常会摆动较长时间,从而在教学上有利于学生观察,有效提高教学质量.

### 参考文献

- [1] 祝昆,杨文韬,郑志荣,等.大学物理实验[M].北京:机械工业出版社,2017:103.
- [2] 谭畅,张国兴,卢盼功,等.基于欠阻尼振动的液体粘度测量装置[J].大学物理,2022,41(4):71-76.
- [3] 陈国杰,周有平,钟土基,等.用弹簧振子受迫振动测量液体粘度[J].大学物理,2013,32(10):30-34.
- [4] 姜兴东,王振坤.利用单摆测量空气阻尼系数[J].软件(教育现代化),2016(4):295.
- [5] 韩桃,齐峰,王安琪.受迫振动法研究压强变化对气体阻尼系数的影响[J].大学物理实验,2014,27(6):8-11.

[6] 欧英雷. 光电计数装置在单摆实验装置中的应用[J]. 物理通报, 2013(5): 80-82.

[7] 杨述武. 普通物理实验(1)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2015: 265-267.

# Experimental Design and Discussion on Measuring the Viscosity Coefficient of Liquid Using a Single Pendulum

ZHANG Shengyao ZENG Zhiqiang LIU Futi WAN Junjie CHEN Peng

(Department of Physics, Yibin College, Yibin, Sichuan 644007)

**Abstract:** this article designed a novel experiment to measure the liquid viscosity based on the damped vibration of a simple pendulum. In this experiment the viscosity coefficients of air, water and rapeseed oil were measured as examples to illustrate the measurement principle and process in details. The experiment results showed that the viscosity coefficients of air, water and rapeseed oil were  $8.78 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $2.30 \times 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  and  $1.06 \times 10^{-1} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , respectively. Thus, the novel experiment design could not only avoid the disadvantages of conventional falling ball method, but also be able to illustrate the influence of liquid viscosity on motion intuitively. It was very helpful to enhance the understanding and creativity of students in physics teaching.

**Key words:** liquid viscosity coefficient; simple pendulum; damped vibration

(上接第 110 页)

下滑时间 0.483 s(表 1) 比较, 我们的求解误差应远小于 10%, 应用在教学甚至研究中都较为可靠.

## 5 结论

本文利用 Tracker 软件辅助进行非光滑下滑轨道最速降线问题的研究. 在分析最速降线问题的基础上, 制作了非光滑下滑轨道实验装置, 进行了 6 个轨道的下滑实验, 进而利用运动轨迹分析软件 Tracker 从下滑视频中分析获得下滑过程的位移时间曲线. 研究结果表明, 利用 Tracker 软件辅助, 可以分析原本难以分析的复杂运动学问题, 为物理教学提供了便利.

## 参考文献

[1] 张正华, 赵祥涛, 张明学, 等. 最速降线在粮食仓储物流

中的应用[J]. 粮食流通技术, 2010(2): 15-16, 31.

[2] 赵晓峰, 葛笛. 从黏滞阻力型最速降线看古建筑凹曲屋面成因[J]. 古建园林技术, 2021(6): 73-77.

[3] 杨亦逸. 最速降线问题的历史与一种巧解[J]. 物理通报, 2021(8): 151-155.

[4] 李玉峰, 熊建文, 杨友源. 视频分析软件在物理实验中的应用[J]. 实验室研究与探索, 2009, 28(4): 62-64.

[5] 艾利斯哥尔兹. 高等学校教学用书变分法[M]. 李世晋, 译. 北京: 人民教育出版社, 1958.

[6] 欧斐君. 变分法及其应用: 物理、力学、工程中的经典建模[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.

[7] 马文东. 从光学极值思想到最速降线问题[J]. 数学通报, 2019, 58(4): 51-53.

[8] 史友进, 俞晓明. 库仑摩擦最速降曲线问题的讨论[J]. 盐城工学院学报(自然科学版), 2012, 25(2): 1-4.

