



利用函数图像巧解 2021 年高考海南物理第 17 题

赵继辰

(北京教育学院数学与科学教育学院 北京 100044)

(收稿日期:2022-08-03)

摘要:从 2021 年海南省高中物理选择性考试第 17 题入手,采用函数图像方法对滑块在长木板滑行的模型进行分析研究,通过几何法和解析法对速度、时间和距离进行求解.

关键词:高考物理;函数图像;滑板模型

1 试题呈现

【例 1】(2021 年海南省高中物理选择性考试第 17 题)如图 1 所示,一长木板在光滑的水平面上以速度 v_0 向右做匀速直线运动,将一小滑块无初速地轻放在木板最右端.已知滑块和木板的质量分别为 m 和 $2m$,它们之间的动摩擦因数为 μ ,重力加速度为 g .求:

(1) 滑块相对木板静止时,求它们的共同速度大小;

(2) 某时刻木板速度是滑块的 2 倍,求此时滑块到木板最右端的距离;

(3) 若滑块轻放在木板最右端的同时,给木板施加一水平向右的外力,使得木板保持匀速直线运动,直到滑块相对木板静止,求此过程中滑块的运动时间以及外力所做的功.



图 1 例 1 题图

2 函数图像方法求解

此题为滑块在长木板滑行的典型问题,是对牛顿运动定律、动量守恒定律及动能定理的综合考查.由于情境中的两个研究对象均做匀变速直线运动,因此我们可以利用速度-时间图像进行求解.

第(1)小题中,滑块在滑动摩擦力的作用下做

初速度为零的匀加速直线运动,由牛顿第二定律可知,滑块加速度的大小为 $a_1 = \frac{f}{m} = \frac{\mu mg}{m} = \mu g$;长木板做初速度为 v_0 的匀减速直线运动,长木板加速度的大小为 $a_2 = \frac{f}{2m} = \frac{\mu mg}{2m} = \frac{1}{2}\mu g$.

设滑块相对木板静止时的共同速度为 v_m ,由此我们可以得到滑块和长木板的速度-时间图像,如图 2 所示.

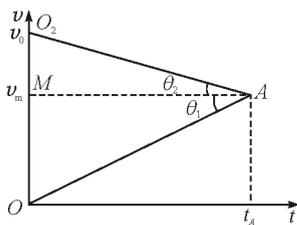


图 2 第(1)小题的速度-时间图像

解法一:几何法

速度-时间图像与时间轴所夹锐角的正切值即为物体加速度的大小^[1],因此 $a_1 = \tan \theta_1$, $a_2 = \tan \theta_2$.由图 2 中的几何关系可知

$$\tan \theta_1 = \frac{\overline{MO}}{\overline{MA}} = \frac{v_m}{t_A}$$

$$\tan \theta_2 = \frac{\overline{MO_2}}{\overline{MA}} = \frac{v_0 - v_m}{t_A}$$

$$\text{即} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{v_m}{v_0 - v_m} = 2$$

$$\text{解得} \quad v_m = \frac{2}{3}v_0$$

解法二:解析法

滑块图像的斜率为 μg , 且经过原点, 其解析式为 $v_1 = \mu g t$; 长木板图像的斜率为 $-\frac{1}{2}\mu g$, 且经过 O_2 点, 其解析式为 $v_2 = -\frac{1}{2}\mu g t + v_0$. 两直线相交于 A 点 (t_A, v_m) , 将交点坐标代入到两直线的解析式中, 有

$$\begin{cases} v_m = \mu g t_A \\ v_m = -\frac{1}{2}\mu g t_A + v_0 \end{cases}$$

联立解得

$$\begin{cases} v_m = \frac{2}{3}v_0 \\ t_A = \frac{2v_0}{3\mu g} \end{cases}$$

第(2)小题中, 设滑块的速度为 v_{B1} , 长木板的速度 $v_{B2} = 2v_{B1}$, 滑块和长木板的速度-时间图像如图 3 所示.

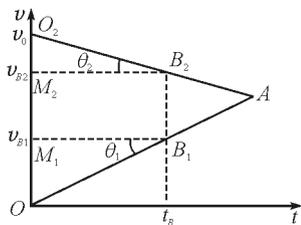


图 3 第(2)小题的速度-时间图像

解法一:几何法

由图 3 中的几何关系可知

$$\tan \theta_1 = \frac{\overline{M_1 O}}{\overline{M_1 B_1}} = \frac{v_{B1}}{t_B}$$

$$\tan \theta_2 = \frac{\overline{M_2 O_2}}{\overline{M_2 B_2}} = \frac{v_0 - v_{B2}}{t_B}$$

即
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{v_{B1}}{v_0 - v_{B2}} = 2$$

解得
$$v_{B1} = \frac{2}{5}v_0 \quad v_{B2} = \frac{4}{5}v_0$$

速度-时间图像与时间轴所围成的面积即为物体运动的位移^[1], 因此滑块到木板最右端的距离为梯形 $OB_1B_2O_2$ 的面积, 即

$$s = \frac{1}{2}(\overline{B_1 B_2} + \overline{O O_2}) \overline{M_1 B_1} =$$

$$\frac{1}{2}(v_{B2} - v_{B1} + v_0) \frac{v_{B1}}{\tan \theta_1} = \frac{7v_0^2}{25\mu g}$$

解法二:解析法

点 $B_1(t_B, v_{B1})$ 在直线 OA 上, 点 $B_2(t_B, v_{B2})$ 在直线 AO_2 上, 将点的坐标代入到两直线的解析式中, 有

$$\begin{cases} v_{B1} = \mu g t_B \\ v_{B2} = -\frac{1}{2}\mu g t_B + v_0 \end{cases}$$

联立解得
$$\begin{cases} v_{B1} = \frac{2}{5}v_0 \\ v_{B2} = \frac{4}{5}v_0 \\ t_B = \frac{2v_0}{5\mu g} \end{cases}$$

第(3)小题中, 滑块依旧做初速度为零的匀加速直线运动, 长木板做匀速直线运动, 长木板所受外力 $F = f = \mu mg$. 设滑块相对木板静止所需的运动时间为 t_C , 滑块的速度-时间图像如图 4 所示.

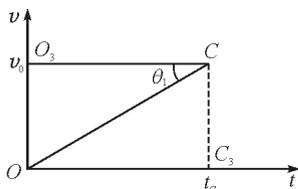


图 4 第(3)小题的速度-时间图像

解法一:几何法

由图 4 中的几何关系可知 $\tan \theta_1 = \frac{\overline{O O_3}}{\overline{O C_3}} = \frac{v_0}{t_C}$, 解得 $t_C = \frac{v_0}{\mu g}$.

木板的位移为图 4 中矩形 OO_3CC_3 的面积, 即 $s = \overline{O O_3} \times \overline{O C_3} = v_0 t_C = \frac{v_0^2}{\mu g}$, 外力所做的功 $W = Fs = mv_0^2$.

解法二:解析法

$C(t_C, v_0)$ 点在直线 OC 上, 将点的坐标代入到直线的解析式中, 有 $v_0 = \mu g t_C$, 解得 $t_C = \frac{v_0}{\mu g}$.

3 试题溯源

【例 2】(2019 年高考江苏物理卷第 15 题) 如图 5 所示, 质量相等的物块 A 和 B 叠放在水平地面上, 左边缘对齐. A 与 B、B 与地面间的动摩擦因数均为 μ . 先敲击 A, A 立即获得水平向右的初速度, 在 B 上滑动距离 L 后停下. 接着敲击 B, B 立即获得水平向右的初速度, A、B 都向右运动, 左边缘再次对齐时恰好相对静止, 此后两者一起运动至停下. 最大静摩擦力等于滑动摩擦力, 重力加速度为 g . 求:

- (1) A 被敲击后获得的初速度大小 v_A ;
- (2) B 被敲击后获得的初速度大小 v_B .

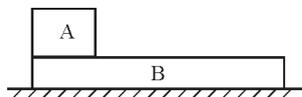


图 5 例 2 题图

解:

此题与例1的主要区别在于长木板与地面之间存在摩擦力. 由于情境中的两个研究对象均做匀变速直线运动, 因此依然可以利用速度-时间图像进行求解.

第(1)小题中, 滑块在滑动摩擦力的作用下做初速度为 v_A 的匀减速直线运动, 直到停止, 滑块加速度的大小为 $a_1 = \frac{f_1}{m} = \frac{\mu mg}{m} = \mu g$; 由于长木板所受到的来自滑块的摩擦力小于长木板与地面之间的最大静摩擦力, 因此长木板静止不动. 由此我们可以得到滑块和长木板的速度-时间图像(图6), $a_1 = \tan \theta_1$.

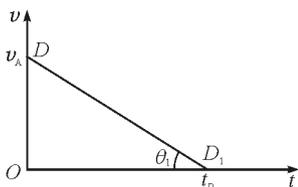


图6 第(1)小题的速度-时间图像

由图6中的几何关系可知

$$\tan \theta_1 = \frac{\overline{OD}}{\overline{OD_1}} = \frac{v_A}{t_D}$$

滑块的位移为 $\triangle ODD_1$ 的面积, 即

$$L = \frac{1}{2} \overline{OD} \times \overline{OD_1} = \frac{1}{2} v_A \frac{v_A}{\tan \theta_1}$$

解得

$$v_A = \sqrt{2\mu g L}$$

第(2)小题中, 滑块做初速度为零的匀加速直线运动, 滑块加速度的大小为 $a_1 = \frac{f_1}{m} = \frac{\mu mg}{m} = \mu g$; 长木板做初速度为 v_B 的匀减速直线运动, 长木板加速度的大小为 $a_2 = \frac{f_1 + f_2}{m} = \frac{\mu mg + 2\mu mg}{m} = 3\mu g$. 当滑块和长木板相对静止后, 两者一起做匀减速直线运动至停下, 加速度的大小为 $a_3 = \frac{f_2}{2m} = \frac{2\mu mg}{2m} = \mu g$. 设滑块相对木板静止时的共同速度为 v_m , 由此我们可以得到滑块和长木板的速度-时间图像如图7所示, $a_2 = \tan \theta_2$, $a_3 = \tan \theta_3$

由图7中的几何关系可知

$$\tan \theta_1 = \frac{\overline{MO}}{\overline{ME}} = \frac{v_m}{t_E}$$

$$\tan \theta_2 = \frac{\overline{MO_2}}{\overline{ME}} = \frac{v_B - v_m}{t_E}$$

$$\text{即} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{v_m}{v_B - v_m} = \frac{1}{3}$$

$$\text{解得} \quad v_m = \frac{1}{4} v_B$$

滑块在长木板上滑行的距离为 $\triangle OEO_2$ 的面积, 即

$$L = \frac{1}{2} \overline{OO_2} \times \overline{ME} = \frac{1}{2} v_B \frac{v_m}{\tan \theta_1}$$

$$\text{解得} \quad v_B = 2\sqrt{2\mu g L} \quad v_m = \frac{1}{2} \sqrt{2\mu g L}$$

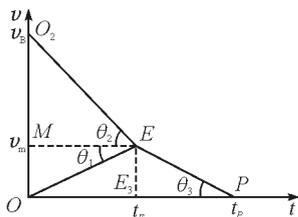


图7 第(2)小题的速度-时间图像

接下来, 由图7中的几何关系可知

$$\tan \theta_3 = \frac{\overline{EE_3}}{\overline{t_P - t_E}} = \frac{v_m}{t_P - t_E}$$

滑块和长木板一起运动的距离为 $\triangle PEE_3$ 的面积, 即

$$s_3 = \frac{1}{2} \overline{EE_3} \times (t_P - t_E) = \frac{1}{2} v_m \frac{v_m}{\tan \theta_3} = \frac{1}{4} L$$

此外, 2021年高考全国乙卷物理第21题^[2]考查了外力随时间线性变化的情形, 2017年高考全国卷Ⅲ物理第25题^[3]考查了3个物体同时运动的情形, 均可利用图像法进行求解, 在此不再一一赘述.

4 总结与启示

滑块在长木板滑行的典型情境, 是高考中出现频率较高的一类力学综合问题, 其主要特点在于情境中的研究对象均做匀变速直线运动, 因此我们既可以采用牛顿运动定律和运动学公式进行求解, 又可以采用动量定理和动能定理进行求解, 还可以利用速度-时间图像进行求解, 而采用图像法既简洁又直观, 避免了繁琐的公式推导.

参考文献

- [1] 张奉平. 高中物理图像之“点、线、面”[J]. 物理教学探讨, 2018, 36(514): 70-72.
- [2] 周浩, 王承业. 2021年高考物理全国乙卷第21题的评析、溯源及其拓展[J]. 物理教师, 2021, 42(10): 87-89.
- [3] 代丽君, 余朝阳. 2017年高考物理全国卷Ⅲ压轴题的多种解法探析[J]. 物理教师, 2017, 38(8): 77-78.