构建数理桥梁 活跃科学思维*

—— 例谈微积分在高中物理中的应用

郭桂泽　柯尊淦
（佛山市第一中学　广东 佛山　528000）

（收稿日期：2022－08－11）

摘　要：着眼于模型构建、科学推理、科学论证和质疑创新等科学思维要素，应用数学微积分方法分析物理问题，进一步构建物理和数学之间的桥梁，让学生体会微积分在推导物理结论、求解物理问题，甚至在检验命题数据是否严谨等方面的独特魅力，从而活跃学生的科学思维，提升学生的迁移能力和学科素养．

关键词：微积分；交流电；电磁感应；科学思维；迁移能力

教育部考试中心研制的《中国高考评价体系》由“一核”“四层”“四翼”3 部分内容组成（图 1）．其中，“一核”是高考的核心功能，即“立德树人、服务选才、引导教学”，回答“为什么考”的问题；“四层”为高考的考查内容，即“核心价值、学科素养、关键能力、必备知识”，回答“考什么”的问题；“四翼”为高考的考查要求，即“基础性、综合性、应用性、创新性”，回答“怎么考”的问题[1]．

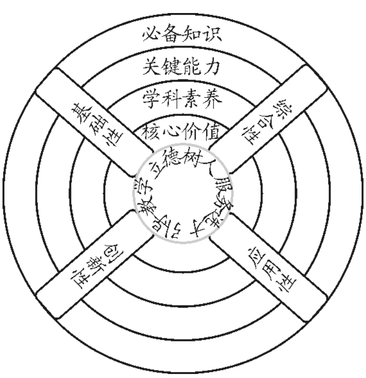

图 1　“一核”“四层”“四翼”内容组成

科学思维作为学科素养中重要的二级指标，是指采用严谨求真的、实证性的逻辑思维方式应对各种问题．运用抽象与联想、归纳与概括、推演与计算、模型与建模等思维方法来组织、调动相关的知识与能力，解决生活实践或学习探索情境中的各种问题．它包含模型建构、科学推理、科学论证、质疑创新等 4 个要素[2]．

微积分是数学的一个基础学科，内容主要包括极限、微分学、积分学及其应用．学生在高中数学课堂中会初步学习微积分知识，然而很多学生学完之后觉得好像用处不大，或者不知道如何做到学以致用．

笔者认为，数学是表达物理规律的重要工具，而物理是数学在实际情境中应用的重要基础．学生对于这两者之间联系的认识不应只是停留在“数学主要是给物理量赋值，只有在代入数据求解时才会用到数学”．其实，在物理学习过程中经常可以接触到微积分的思想，如求解瞬时速度时可以应用极限思想，理解加速度定义式可以利用导数知识[3]，求解变力做功时可以应用微元法和积分法[4]等等．

以下是笔者在物理教学实践中应用微积分的 3 个案例．

1　利用微积分推导物理结论

在高中物理教材中，关于正弦式交流电的有效值，一般都会这样描述“理论推导表明：正弦式电流的电动势、电流和电压的有效值与峰值之的关系如下 $U=\dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$ ，$I=\dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$ ．”

教学过程中，往往教师也会告诉学生，这个推导过程要用到微积分，学生一听，觉得推导过程会很难，甚至觉得自己在数学课堂所学习的微积分知识

＊ 广东省中小学“百千万人才培养工程”专项科研项目“高中物理促进学生科学思维发展的专题教学研究”阶段性成果，项目编号：BQW2021JGL027．

很难在物理学习过程中应用.其实,教师可以将推导过程适当简化后,让学生课后也尝试推导一次,这样既能让学生更深刻地体会到数学作为物理学习的工具,确实有其魅力所在,也能让学生更好地构建数学和物理之间的桥梁,活跃学生的科学思维.

【例 1】若交流电 $u=U_{\rm m}\sin t(\omega=1\ {\rm rad/s},T=2\pi\ {\rm s})$ 加载在一个阻值为 R 的电阻上,直流电 U 加载在另一个阻值为 R 的电阻上,两电阻在时间 $T=2\pi$ s 内产生的电热均为 Q,试推导 $U=\dfrac{U_{\rm m}}{\sqrt{2}}$.

推理论证:

(1) 若用直流电 U 加载在 R 上,时间 T 内产热为

$$Q=\frac{U^2}{R}T=\frac{U^2}{R}2\pi$$

(2) 若用交流电 u 加载在 R 上,电流瞬时值

$$i=\frac{U_{\rm m}}{R}\sin t$$

在 dt 时间内产热

$$\mathrm{d}Q=i^2R\mathrm{d}t=\left(\frac{U_{\rm m}}{R}\sin t\right)^2R\mathrm{d}t=\frac{U_{\rm m}^2}{R}\sin^2t\mathrm{d}t$$

在一个周期 T 内 R 产生的电热为

$$Q=2\int_0^{\frac{T}{2}}\mathrm{d}Q=2\int_0^{\pi}\frac{U_{\rm m}^2}{R}\sin^2t\mathrm{d}t=$$

$$\frac{2U_{\rm m}^2}{R}\int_0^{\pi}\sin^2t\mathrm{d}t=$$

$$\frac{2U_{\rm m}^2}{R}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{2U_{\rm m}^2}{R}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{U_{\rm m}^2}{R}\left(\int_0^{\pi}1\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}\cos 2t\mathrm{d}t\right)=$$

$$\frac{U_{\rm m}^2}{R}\left(t\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$\frac{U_{\rm m}^2}{R}\left[(\pi-0)-\left(\frac{1}{2}\sin 2\pi-\frac{1}{2}\sin 0\right)\right]=\frac{\pi U_{\rm m}^2}{R}$$

令
$$\frac{U^2}{R}2\pi=\frac{\pi U_{\rm m}^2}{R}$$

解得
$$U=\frac{U_{\rm m}}{\sqrt{2}}$$

评价反思:

笔者根据交流电电压有效值的定义建构模型、命制此例题,对交流电的表达式进行简化,以降低推导过程中使用微积分知识的难度.

尽管如此,对于高中学生而言,本题中的原函数求解仍然是有一定难度的,若想让学生亲自动手推导,不防在此例题之前,先让学生回顾一下三角函数的半角公式,并求一下 $\dfrac{1}{2}\sin 2t$ 的导数,搭建相关知识台阶,这样学生的思路才能更加顺畅,增强“跳一跳就能摘到苹果”的信心.

2　利用微积分求解物理问题

【例 2】一台发电机在产生正弦式电流,其外电路只有一个阻值为 2 kΩ 的电阻元件 R.已知该发电机电动势的峰值 $E_{\rm m}=400$ V,线圈匀速转动的角速度 $\omega=314$ rad/s,且线圈内阻不计.若从如图 2 所示位置开始计时,线圈转过 90° 的过程中,通过 R 的电荷量 q 为多少?

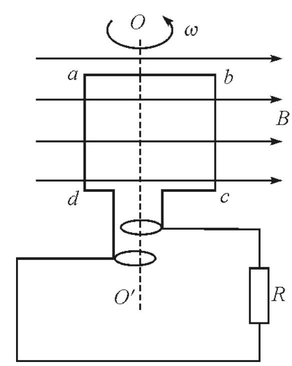

图 2　例 2 题图

解法一:(利用法拉第电磁感应定律求解)

线圈转过 90°,则磁通量变化量

$$\Delta\Phi=BS$$

通过 R 的电荷量 $q=\overline{I}t$

又　$\overline{I}=\dfrac{\overline{E}}{t}$　　$\overline{E}=n\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$　　$E_{\rm m}=nBS\omega$

解得
$$q=\frac{E_{\rm m}}{\omega R}\approx 6.37\times 10^{-4}\ {\rm C}$$

解法二:(以时间 t 为积分变量,利用积分求解)

该发电机产生的电动势瞬时值

$$e=400\cos 100\pi t$$

由 $i=\dfrac{e}{R}$ 得通过 R 的电流瞬时值

$$i=0.2\cos 100\pi t$$

设线圈转动周期为 T,则线圈转过 90° 的时间为

$$t_0=\frac{T}{4}\qquad T=\frac{2\pi}{\omega}$$

则通过的电荷量

$$q=\int_0^{t_0} i\mathrm{d}t=\int_0^{t_0} 0.2\cos 100\pi t\mathrm{d}t=$$

$$\frac{0.2}{100\pi}\sin 100\pi t\Big|_0^{t_0}\approx 6.37\times 10^{-4}\ \mathrm{C}$$

解法三:(以转过角度 θ 为积分变量,利用积分求解)

该发电机产生的电动势瞬时值

$$e=400\cos 100\pi t$$

由 $i=\frac{e}{R}$ 得通过 R 的电流瞬时值

$$i=0.2\cos 100\pi t$$

设线圈转动角度为 θ,则

$$\theta=\omega t=100\pi t$$

线圈转过 $90°$ 时

$$\theta_0=\frac{\pi}{2}$$

则 $\mathrm{d}\theta=100\pi\mathrm{d}t$,即 $\mathrm{d}t=\frac{1}{100\pi}\mathrm{d}\theta$

则通过的电荷量

$$q=\int_0^{t_0} i\mathrm{d}t=\int_0^{t_0} 0.2\cos 100\pi t\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^{\theta_0} 0.2\cos\theta\,\frac{1}{100\pi}\mathrm{d}\theta=$$

$$\frac{0.2}{100\pi}\sin\theta\Big|_0^{\theta_0}\approx 6.37\times 10^{-4}\ \mathrm{C}$$

评价反思:

解法一是高中阶段解决此类题目的最常用解法,结合磁通量变化量和感应电动势最大值等概念,巧妙运用法拉第电磁感应定律进行求解,比较符合高中学生的知识水平和认知水平.

解法二需结合复合函数求导公式来求解原函数,对于初学微积分知识的学生来说,求解难度偏大.

解法三需结合微分运算对积分参量进行转换,但相比解法二而言,因省去结合复合函数求导公式来求解原函数的过程,可以在一定程度上降低出错率.

在解法二和解法三的求解过程中,我们不难发现,只需使用欧姆定律这一简单的物理规律,结合微积分等数学知识来求解物理问题.这样既能帮助学生进一步认识微积分等数学知识在物理问题中的意义和价值,又能让学生体会物理问题解决的多样性和统一性,能够在一定程度上达到发散学生思维,培养创新意识.

3　利用微积分检验命题数据

【例 3】如图 3 所示,足够长的光滑平行金属导轨 MN、PQ 竖直放置,其宽度 $L=1$ m,一匀强磁场垂直穿过导轨平面,导轨的上端 M 与 P 之间连接阻值为 $R=0.40\ \Omega$ 的电阻,质量为 $m=0.01$ kg、电阻为 $r=0.30\ \Omega$ 的金属棒 ab 紧贴在导轨上.现使金属棒 ab 由静止开始下滑,下滑过程中 ab 始终保持水平,且与导轨接触良好,其下滑距离 x 与时间 t 的关系如图 4 所示,图像中的 OA 段为曲线,AB 段为直线,导轨电阻不计,$g=10\ \mathrm{m/s^2}$(忽略 ab 棒运动过程中对原磁场的影响),试求:

(1) 当 $t=1.5$ s 时,重力对金属棒 ab 做功的功率.

(2) 金属棒 ab 在开始运动的 1.5 s 内,电阻 R 上产生的热量.

(3) 磁感应强度 B 的大小.

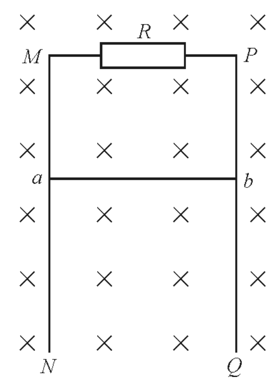

图 3　例 3 题图

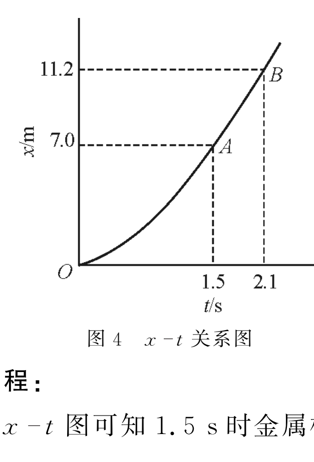

图 4　$x-t$ 关系图

求解过程:

(1) 由 $x-t$ 图可知 1.5 s 时金属棒 ab 的速度

$$v_A=\frac{x_{AB}}{t_{AB}}=\frac{11.2-7.0}{2.1-1.5}\ \mathrm{m/s}=7\ \mathrm{m/s}$$

重力对金属棒 ab 做功的功率

$$P = mgv_A = 0.7\ \text{W}$$

(2) 根据能量守恒定律得

$$mgx_{AB} = \frac{1}{2}mv^2 + Q_{总}$$

电阻 R 上产生的热量 $Q_R = \frac{R}{R+r}Q_{总}$

代入数据,解得 $Q_R = 0.26\ \text{J}$

(3) 金属棒 ab 匀速运动时有

$$BIL = mg$$

又 $I = \frac{E}{R+r}$ $E = BLv$

代入数据,解得 $B = 0.1\ \text{T}$

评价反思:

此题是一道非常经典且热门的电磁感应试题,据笔者了解,在最近的 10 多年间,频频出现在全国各地的高三模拟卷或高二测试卷中,如 2011 年北京市海淀区二模、2012 年大连市模拟、2014 年滨州市一模、2018 年郴州市一模、2020 年如皋市校级一模等.

笔者本想在此题后面增设第(4) 问"求金属棒 ab 在开始运动的 1.5 s 内,通过电阻 R 的电荷量 q",然后给学生练习. 然而,笔者却发现:采用不同的方法(以下的解法一和解法二) 进行科学推理时,结果竟然是不同的! 求解过程如下.

解法一:

在 0 ~ 1.5 s 内

平均感应电动势 $\overline{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{BLx_{AB}}{t_{AB}}$

电路中的平均电流 $\overline{I} = \frac{\overline{E}}{R+r}$

通过 R 的电荷量 $q = \overline{I}t_{AB}$

代入数据,解得 $q = 1\ \text{C}$

解法二:

在 0 ~ 1.5 s 内,对金属棒 ab 有

$$mgt_{OA} - B\overline{I}Lt_{OA} = mv_A - 0$$

$$mgt_{OA} - BLq = mv_A - 0$$

代入数据,解得 $q = 0.8\ \text{C}$(与解法一结果不同)

评价反思:

笔者利用微积分进行科学论证(详见以下的解法三),发现此题其实隐藏着一个鲜为人知的错误——$x-t$ 图像数据不准确. 虽然题中的 $x-t$ 图对第(1)、(2)、(3) 问的求解都没有影响,但是图像始终是错误的,命题是不严谨的.

解法三:利用微积分进行数据检验

在 t 时刻,金属棒 ab 受安培力 $F_t = BiL$

又 $i = \frac{e}{R+r}$ $e = BLv_t$

在 0 ~ 1.5 s 内,对金属棒 ab 有

$$mgt_{OA} - \int_0^{1.5} F_t\,\mathrm{d}t = mv_A - 0$$

$$mgt_{OA} - \int_0^{1.5} B\frac{BLv_t}{R+r}L\,\mathrm{d}t = mv_A - 0$$

$$mgt_{OA} - \frac{B^2L^2}{R+r}\int_0^{1.5} v_t\,\mathrm{d}t = mv_A - 0$$

$$mgt_{OA} - \frac{B^2L^2}{R+r}x_{OA} = mv_A - 0$$

解得 $$x_{OA} = \frac{(mgt_{OA} - mv_A)(R+r)}{B^2L^2} \tag{1}$$

代入数据可知:等式不成立,数据出错.

最后,笔者也利用解法三的结论对 $x-t$ 图像进行修正,提出以下两种修正方法:

修正法一:若令 $x_{OA} = 7.0\ \text{m}$ 为准确值,将数据代入式(1),可知 $t_{OA} = 1.7\ \text{s}$,$t_{OB} = 2.3\ \text{s}$,修正时间轴的两个坐标值即可.

修正法二:若令 $t_{OA} = 1.5\ \text{s}$ 为准确值,将数据代入式(1),可知 $x_{OA} = 5.6\ \text{m}$,$x_{OB} = 9.8\ \text{m}$,修正位移轴的两个坐标值即可.

3 结束语

在以上教学实践案例中,笔者适当将学生学过的数学知识和物理规律进行联系,构建数理桥梁,引导学生进行知识迁移能力训练,让学生体会微积分在推导物理结论、求解物理问题,甚至在检验命题数据是否严谨等方面的独特魅力,旨在活跃学生的科学思维,启发学生形成"学而有用、学以致用、用而有效" 的学习观念,提升学生的学科素养.

参 考 文 献

[1] 教育部考试中心. 中国高考评价体系[M]. 北京:人民教育出版社,2019:6-7.

[2] 教育部考试中心. 中国高考评价体系[M]. 北京:人民教育出版社,2019:22.

[3] 王娟. 高中物理关于微积分的教与学[J]. 数理化解题研究,2019(24):53-54.

[4] 王彦芸. 高中物理教学中引入微积分方法的必要性[J]. 教育教学论坛,2019(49):198-200.