



# 等量同种点电荷连线中垂线上电场场强分布分析\*

王理想

(海南省教育研究培训院 海南 海口 571100)

路俊哲

(新疆师范大学物理与电子工程学院 新疆 乌鲁木齐 830054)

(收稿日期:2022-08-24)

**摘要:**培养学生熟练运用数学知识解决物理问题,提升学科科学思维,培养学生学科核心素养.利用几何画板、Excel 图像功能,从定性角度分析帮助学生理解同种点电荷连线中垂线上电场强度的变化情况,利用数学求导、均值不等式求解电场强度的最大值及位置.

**关键词:**场强;最大值;素养

普通高中物理课程标准(2017年版2020年修订)指出会用电场线描述电场.能用电场线模型分析电场,简单的问题,并得出结论.在分析和论证过程中,能使用证据说明自己的观点.用电场线描绘两个等量点电荷周围的电场,会利用矢量运算法则求解电场强度叠加问题是静电场教学中的内容基本教学要求.

**【问题】**如图1所示,等量同种正点电荷相距 $2r$ , $O$ 点是两点电荷连线中点,已知无限远处电场强度为零,由电场强度叠加可知 $O$ 点合场强为零.从 $O$ 点沿着两点电荷连线的中垂线向两侧延伸,可知两点电荷产生的电场强度是先增大后减小的.中垂线上存在合场强最大值在哪里?其最大值又是多少?

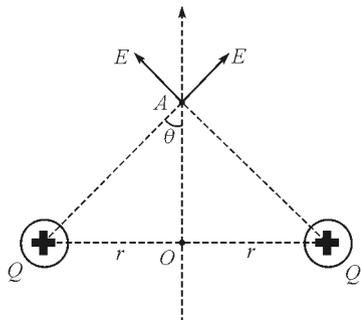


图1 问题题图

**解析:**设两点电荷在A点合场强最大,点电荷与

A点连线与中垂线的夹角设为 $\theta$ ,每个点电荷的电荷量为 $Q$ ,则其中一个点电荷在A点的电场强度

$$E = \frac{KQ}{r^2} \sin^2 \theta$$

则两个点电荷在A点的合场强

$$E_A = 2E \cos \theta = \frac{2KQ}{r^2} \sin^2 \theta \cos \theta$$

## 1 定性分析

利用几何画板、Excel 图像功能画出 $\sin^2 \theta \cos \theta$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 区间图像,从定性角度分析帮助学生理解同种点电荷连线中垂线上电场强度的变化情况.

(1)在几何画板绘图功能中选择绘制新函数,输入 $y = \sin(\theta) * \sin(\theta) * \cos(\theta)$ ,其中 $\theta$ 单位为弧度.如图2所示.

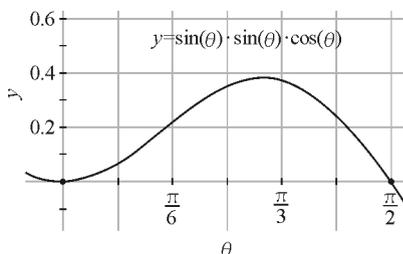


图2 利用几何画板绘制的函数图像

\* 2022年度新疆维吾尔自治区高校本科教育教学研究和改革项目“基于卓越教师培养的《力学》一流课程‘四融四度’教学改革研究,项目编号:XJGXPTJG-202223;2021年高等学校大学物理教指委西北地区工作委员会教学研究“大学物理课程思政案例库及教学设计的阶段性成果,项目编号:XBJY202104.

(2) Excel 表格中 A 列为自变量  $\theta$ , 把  $(0, \frac{\pi}{2}]$  转

换为数值  $(0, 1.6)$ , 自行设置精度. B 列为因变量  $y$ , 在 B1 单元格输入“= SIN(A1) \* SIN(A1) \* COS(A1)”, 用鼠标摁住 B1 单元格右下角往下拖动复制公式, 形成 B 列数据, 选择 A 和 B 列数据插入图表, 生成带平滑线的散点图, 如图 3 所示.

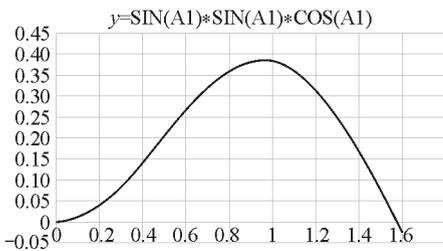


图 3 利用 Excel 表格绘制的函数图像

由图 2 和图 3 可得出从无限远到  $O$  点, 同种点电荷连线中垂线上电场强度先增大后减小.

利用几何画板、Excel 图像功能将物理知识形象、直观地呈现出来, 使得物理知识可视化, 帮助学生理解并掌握物理知识. 通过图像获取证据的意识, 提升学生科学思维能力, 灵活运用信息技术进行科学探究的能力, 对场强变化的理解, 强化电场的物质观念.

## 2 定量分析

利用数学求导、均值不等式从定量角度分析同种点电荷连线中垂线上电场强度的最大值及位置.

### 2.1 数学求导法

$$f(x) = \sin^2 \theta \cos \theta =$$

$$(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta = \cos \theta - \cos^3 \theta$$

$$\text{令 } t = \cos \theta, t \in [0, 1)$$

$$f(t) = t - t^3$$

$$f'(t) = 1 - 3t^2$$

由导数图像知

函数  $f(t)$  在  $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$  单调递增, 在  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$  单调

递减.

当  $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$  时, 即  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ,  $f(x)$  取

得最大值, 所以

$$\sin^2 \theta \cos \theta = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$E_A = \frac{4\sqrt{3}KQ}{9r^2}$$

A 点与点电荷间距离为  $\frac{\sqrt{6}}{2}r$ , A 点与  $O$  点间距离为  $\frac{\sqrt{2}}{2}r$ .

### 2.2 均值不等式法

$$\sin^2 \theta \cos \theta = \sqrt{\sin^2 \theta \sin^2 \theta \cos^2 \theta} =$$

$$2 \sqrt{\frac{1}{2} \sin^2 \theta \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \leq$$

$$2 \sqrt{\left( \frac{\frac{1}{2} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{3} \right)^3}$$

当且仅当  $\frac{1}{2} \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$  时, 上式取等号, 函数

取得最大值, 即  $\sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$  时,  $\sin^2 \theta \cos \theta = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ . 可求出

$$E_A = \frac{4\sqrt{3}KQ}{9r^2}$$

得出结论: 点电荷周围的电场在以点电荷为中心立体空间分布, 等量同种点电荷相距  $2r$ , 连线中垂面上, 距两点电荷连线中点  $O$  距离  $\frac{\sqrt{2}}{2}r$  的圆周上

如图 4 所示, 合场强最大为  $\frac{4\sqrt{3}KQ}{9r^2}$ .

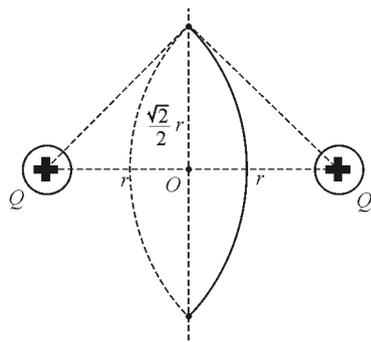


图 4 定量分析所得结论图

以上结论合理外推, 等量同种点电荷相距  $2r$ , 连线中垂面上, 当第三个点电荷处于中垂面内, 距等量同种点电荷连线中点  $\frac{\sqrt{2}}{2}r$  圆周上, 受到的电场力最大. 也可把两点电荷转换为两个实物球体, 可类比出第三个实物球体处在连线中垂面上何处受到的合力最大.

**【例题】**如图5所示,两个等量的正点电荷, $O$ 点为两点电荷连线的中点, $A$ 点为两点电荷连线的中垂线上的一点.一带负电的试探电荷 $q$ ,从 $A$ 点由静止释放,只在静电力作用下运动,则( )

- A.  $q$ 由 $A$ 点向 $O$ 点的运动速度一直增加  
 B.  $q$ 由 $A$ 点向 $O$ 点的运动速度先增加后减小  
 C.  $q$ 由 $A$ 点向 $O$ 点的运动加速度一直减小  
 D.  $q$ 由 $A$ 点向 $O$ 点的运动加速度先增加后减小

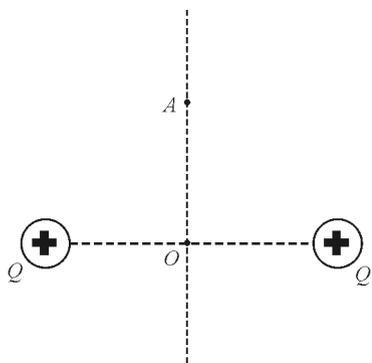


图5 例题题图

**解析:**因为不清楚 $A$ 点与中垂线上电场强度最大处的关系,所以对于运动加速度的变化情况需进

行分类讨论:如 $A$ 点在 $O$ 点与电场强度最大处之间,则 $q$ 由 $A$ 点向 $O$ 点的运动加速度一直减小;如电场强度的最大处在 $A$ 点与 $O$ 点之间,则 $q$ 由 $A$ 点向 $O$ 点的运动加速度先增加后减小.对于运动速度, $q$ 由 $A$ 点向 $O$ 点的运动受到的静电力从 $A$ 点指向 $O$ 点,一直做加速运动.正确答案为选项A.

两种定量数学分析方法是高中生数学知识学习要求掌握的内容,对学有余力的学生不仅定性还要定量知道,在两等量同种点电荷连线的中垂线上存在着场强最大值点.通过多种方法分析、解决物理问题过程,不仅仅是为了得到答案或结论,而是要全面锻炼学生的科学思维能力,全面提高学生的问题解决能力,形成物理观念.解决问题有依据,有思路,实现知识向能力的转变,最终形成素养.

#### 参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中物理课程标准(2017年版2020年修订)[S]. 北京:人民教育出版社,2020.  
 [2] 冯建跃. 用初等数学方法求等量同种电荷中垂线上电场强度的极值[J]. 物理教师,2015(11):56-57.  
 [3] 陈一垠. 关于两等量同种点电荷中垂线上场强最大值的再思考[J]. 物理通报,2015(6):121-122.

(上接第158页)

又由于总有 $0 < x_2(\theta) < x_0(\theta)$ ,所以蜃像与原物体总是处在观察者的同侧,且像与观察者的水平距离比原物与观察者的水平距离小.

以上用指数函数折射率模型分析了海市蜃楼上现蜃景现象.对于下现蜃景的情形,可以取 $n^2(y) = n_0^2(1 - e^{-\alpha y})$ ,并将物点置于地面上方一定高度,即可相应地进行分析.此时蜃像位于下方,且与观察者的水平距离比原物近.

#### 4 结论

本文利用指数函数折射率模型研究了一般情况下的海市蜃楼现象.结果表明,在指数函数折射率模型下,折射光束不能理想成像.但由于人眼瞳孔的范围很小,仍可观察到像点.对于同一物点,蜃像的位置与观察点有关.蜃像与原物体总是处在观察者的同侧,并处在观察者的上方(上现蜃景).在可能观察到蜃景的范围内,观察者距原物体愈近,则观察到上现蜃景的位置愈低.所得结论与实际观测结果一致.

#### 参考文献

- [1] 玻恩,沃耳夫. 光学原理(上、下册)[M]. 北京:电子工业出版社,2005.  
 [2] 赫克特 E, 赞斯 A. 光学[M]. 北京:高等教育出版社,1983.  
 [3] 叶培大,吴彝尊. 光波导技术基本理论[M]. 北京:人民邮电出版社,1984.  
 [4] A·K·伽塔克, K·谢伽拉扬. 近代光学[M]. 北京:高等教育出版社,1988.  
 [5] 姚启钧. 光学教程[M]. 3版. 北京:高等教育出版社,1996.  
 [6] 赵凯华, 钟锡华. 光学[M]. 北京:北京大学出版社,1991.  
 [7] 易明. 光学[M]. 北京:高等教育出版社,2000.  
 [8] 章志鸣. 光学[M]. 北京:高等教育出版社,1999.  
 [9] 郭永康. 光学[M]. 成都:四川大学出版社,1998.  
 [10] 王忠纯. 用线性变折射率模型解释海市蜃楼[J]. 大学物理,2001(9):24-27.  
 [11] 吕洪君. “海市蜃楼”的理论研究[J]. 安徽教育学院学报,1998(1):26-28.