大学物理教学

运动叠加原理的一种充要条件及其应用

邢　容
（湖南科技学院理学院　湖南 永州　425199）
邓茂钰
（海桂中学　海南 琼海　571400）

（收稿日期:2022-08-28）

摘　要:提出并证明了运动叠加原理的一种充要条件.之后,运用此充要条件对 3 类质点运动的分解作了讨论.结果表明,抛体运动可以分解为自由落体运动和以初速度为速度的匀速直线运动两个独立分运动;均匀磁场中带电质点的运动可以分解为沿磁场方向的匀速直线运动与在垂直于磁场的平面内发生的匀速圆周运动这样的两个独立运动;均匀电磁场中带电质点的运动可以分解为沿磁场方向的匀变速直线运动、沿同时垂直于磁场与电场方向的匀速直线运动和在垂直于磁场的平面内的匀速圆周运动这 3 个独立分运动.

关键词:运动叠加原理;质点;抛体运动;均匀磁场;均匀电磁场

1　引言

运动叠加原理是一条颇具实用价值的原理,可表述为[1]:一个运动可以看成几个各自独立进行的运动叠加而成.利用此原理,就可将本来较为复杂的运动分解为几个较为简单、易于处理,且彼此独立的分运动.而只要搞清楚各分运动,就可以掌握原运动的所有情况了.不过,众所周知的是,运动叠加原理并不总是成立的,的确存在一些使运动叠加原理无效化的运动过程.或者说,并不是什么运动都可以分解成简单且彼此独立的分运动的.因此,一直以来对运动叠加原理都存在争议.

20 世纪 90 年代,文献[2-3]通过列举反例来说明,运动叠加原理是不存在的.他们认为那些视运动叠加原理成立的观点都只是误将矢量运算上的叠加性当成了运动的叠加性了.他们完全否定运动叠加原理的论点是过于绝对化的.之后的文献基本都认为运动叠加原理在特定条件下是可以成立的.比如,文献[4]和文献[5]都认为普遍意义上的运动叠加原理是不存在的,分运动仅在特定条件才是相互独立的.文献[6]分析了几个特例之后认为,仅当分运动的运动微分方程彼此独立或可以化作彼此独立时,运动叠加原理才成立.文献[7]在归纳了几种特定运动过程后提出,只要质点运动的动力学方程是线性微分方程,那么该运动就一定能被分解为若干相互独立的分运动.

需要指出的是,上述部分文献为了说明运动叠加原理不成立而列举的反例存在问题.他们错误地将“一个运动不能被分解为若干独立分运动”等价成“一个运动不能被分解成分别沿 x 轴、y 轴和 z 轴方向的三个独立分运动”.比如,文献[3]认为一个带电质点在均匀电场和均匀磁场所构成的电磁场中进行的运动是不能使用运动叠加原理的.而实际上本文的讨论表明,这一类运动可以分解为沿磁场方向的匀变速直线运动,以及在垂直于磁场平面内的匀速直线运动与匀速圆周运动这 3 个独立分运动.再有,文献[5]认为一个带电质点受洛伦兹力作用所做的匀速圆周运动是运动叠加原理的一个“反例”.但是实际上,任何匀速圆周运动都可以分解为两个相互正交的独立直线运动.文献[6]列举的带电质点在重力场与均匀磁场中的运动此一“反例”实际上与前述文献[3]的“反例”类似,也可分解成 3 个独立分运动.

此外,文献[7]给出的运动叠加原理成立的条件也只是充分条件,却并非是必要的,很容易就能列举出一类运动,它一方面具有非线性动力学方程,另

一方面却又能分解成独立分运动.

本文先是给出运动叠加原理的一种充要条件，之后利用它将几种质点运动成功地分解成若干独立分运动.

2　运动叠加原理充要条件的推得

运动总是可以分解的，但是只有当分解出来的分运动彼此独立时才符合运动叠加原理的要求. 设某个质点运动已经被分解成运动 1 和运动 2 这样两个分运动，且质点在运动 1 和运动 2 中的 3 个运动量分别为$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{a}_1)$和$(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{a}_2)$. 众所周知，速度是位矢对时间的一阶导数，而加速度是速度对时间的一阶导数、位矢对时间的二阶导数. 这意味着，$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_1$ 彼此相关，知道其中任何一个随时间的变化情况，其他两个也就清楚了，因此$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{a}_1)$中的任意一个都足以代表整个运动 1. 对于$(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{a}_2)$和运动 2 也有完全类似的讨论. 由以上认识容易得到下面的命题

$$\left[\begin{array}{l}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{a}_1)\text{中至少有}\\ \text{一个量与}(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{a}_2)\\ \text{中的某个量相关}\end{array}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{a}_1)\text{中的各}\\ \text{量与}(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{a}_2)\text{中}\\ \text{的各量皆有关}\end{array}\right] \tag{1}$$

需要强调的是，命题(1) 等价于号左侧叙述中所谓的两个运动量“相关”是指它们之间存在由运动本身的特性出发根据物理原理建立的关系式，而不是指在数学上通过消去时间 t 凑出来的关系式. 若$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{a}_1)$中有一个量与$(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{a}_2)$中某个量相关，也即两者的取值相互依赖，那么因为如前所述任何一个运动量都足以代表整个运动，所以可有，两个运动也就必定是相关的. 反之，如果两个运动彼此相关，那么双方的运动量中至少都应各有一个是相互关联的. 这即是说，应有下面的命题成立

$$\left[\begin{array}{l}\text{运动 1 与运动}\\ \text{2 彼此相关}\end{array}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{a}_1)\text{中至少有一}\\ \text{个量与}(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{a}_2)\text{中的}\\ \text{某个量相关}\end{array}\right] \tag{2}$$

结合命题(1) 与(2) 即可得

$$\left[\begin{array}{l}\text{运动 1 与运动}\\ \text{2 彼此相关}\end{array}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{a}_1)\text{中的各量与}\\ (\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{a}_2)\text{中的各量皆}\\ \text{有关}\end{array}\right] \tag{3}$$

此命题的逆否即为

$$\left[\begin{array}{l}\text{运动 1 与运动}\\ \text{2 彼此无关}\end{array}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{a}_1)\text{中至少有一}\\ \text{个量与}(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{a}_2)\text{中的}\\ \text{某个量无关}\end{array}\right]$$

两个运动彼此无关也就是两者相互独立，因此此命题又可改为

$$\left[\begin{array}{l}\text{运动 1 与运动}\\ \text{2 彼此独立}\end{array}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{a}_1)\text{中至少有一}\\ \text{个量与}(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{a}_2)\text{中的}\\ \text{某个量无关}\end{array}\right] \tag{4}$$

命题(4) 就是两个运动彼此独立的充要条件. 由它可知，只要能证明$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{a}_1)$中有一个量与$(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{a}_2)$中某个量无关，那么即可得出两个分运动彼此独立的结论. 此外，命题(2) 也是有用的，如果能证明$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{a}_1)$中有一个量与$(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{a}_2)$中某个量有关，那么即可知两个分运动必定是相互关联的.

3　运动叠加原理充要条件的应用

3.1　抛体运动

设质点被以初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 抛出，则由牛顿运动定律容易得出它在任意时刻的速度可表示为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{g}t+\boldsymbol{v}_0 \tag{5}$$

式中的矢量 $\boldsymbol{g}$ 表示重力加速度，其大小等于 g，方向竖直向下. 另外定义两个速度 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$，令它们分别满足

$$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_0 \qquad \boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{g}t \tag{6}$$

容易看出：其一，$\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 之和就等于 $\boldsymbol{v}$，因此 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 所分别描述的运动可视为原运动的分运动；其二，$\boldsymbol{v}_1$ 的值为已知常矢量，不会因 $\boldsymbol{v}_2$ 的改变而改变，这即是说 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 是无关的. 综合以上两点，再由命题(4) 即可知，$\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 各自代表的两个分运动是彼此独立的. 也就是说，任意抛体运动总可以分解为速度取值为初速度的匀速直线运动和一个自由落体运动这两个独立分运动.

3.2　均匀磁场中带电质点的运动

设一质量为 m、带电荷量为 q 的质点在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中运动. 不考虑重力，其加速度可表示为

$$\boldsymbol{a}=\frac{q}{m}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{7}$$

将质点的运动分解成速度分别为 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 的两个分运动 1 和 2，于是可有

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2 \tag{8}$$

将式(8) 代入式(7) 中即可得

$$\boldsymbol{a}=\frac{q}{m}\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{B}+\frac{q}{m}\boldsymbol{v}_2\times\boldsymbol{B} \tag{9}$$

分别设两个分运动的加速度为 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$，且令它们分别满足

$$\boldsymbol{a}_1=\frac{q}{m}\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{B}\qquad \boldsymbol{a}_2=\frac{q}{m}\boldsymbol{v}_2\times\boldsymbol{B} \tag{10}$$

很明显，加速度 $\boldsymbol{a}_1$ 只与 $\boldsymbol{v}_1$ 有关，与 $\boldsymbol{v}_2$ 毫无关联，因此分运动 1 和 2 是相互独立的. 至此，虽然已经可以说质点的运动满足运动叠加原理，但是可以看到式(10) 中的两式在形式上与式(7) 完全相同，根本看不到运动分解对问题的简化有任何益处. 实际上，这个问题可以通过选择合适的 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 来解决.

将 $\boldsymbol{v}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 确定的平面中分别沿平行于 $\boldsymbol{B}$ 和垂直于 $\boldsymbol{B}$ 的两个方向进行分解，并令所得到的分速度分别就是式(8) 中的 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$. 由此设定即可得

$$\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{B}=0\qquad \boldsymbol{v}_2\times\boldsymbol{B}=v_2B\boldsymbol{e}_{\rm n} \tag{11}$$

式中的单位矢量 $\boldsymbol{e}_{\rm n}$ 与 $\boldsymbol{v}_2$、$\boldsymbol{B}$ 满足右手螺旋定则. 将式(11) 代入式(10) 中可得

$$\boldsymbol{a}_1=0\qquad \boldsymbol{a}_2=\frac{qB}{m}v_2\boldsymbol{e}_{\rm n} \tag{12}$$

式(12) 中的第一式表明分运动 1 是一个沿着平行于磁场方向进行的匀速直线运动. 而第二式中的加速度 $\boldsymbol{a}_2$ 始终与 $\boldsymbol{v}_2$ 垂直，可以证明它描述的分运动 2 是一个在与磁场垂直的平面内进行的匀速圆周运动. 至此，原来的运动就被分解成了两个简单且独立的分运动了.

3.3　均匀电磁场中带电质点的运动

设一质量为 m、带电荷量为 q 的质点在由均匀电场 $\boldsymbol{E}$ 和均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 所构成的电磁场中运动. 不考虑重力，质点的加速度可表示为

$$\boldsymbol{a}=\frac{q}{m}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}+\frac{q}{m}\boldsymbol{E} \tag{13}$$

类似于上一小节的做法，可以令两个分运动分别满足以下两式

$$\boldsymbol{a}_1=\frac{q}{m}\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{B}+\frac{q}{m}\boldsymbol{E}\qquad \boldsymbol{a}_2=\frac{q}{m}\boldsymbol{v}_2\times\boldsymbol{B} \tag{14}$$

若同样令 $\boldsymbol{v}_1$ 平行于 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{v}_2$ 垂直于 $\boldsymbol{B}$，则立即可得加速度 $\boldsymbol{a}_1$ 取值为平行于 $\boldsymbol{E}$ 的常矢量. 可 $\boldsymbol{v}_1$ 已被设定为与 $\boldsymbol{B}$ 平行，因此 $\boldsymbol{a}_1$ 也必与 $\boldsymbol{B}$ 平行. 这就要求电场与磁场必须是平行的. 但是这里要讨论的是一般情形下的均匀电磁场，因此式(14) 所给定的运动分解是不可取的.

将 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 都沿着平行于 $\boldsymbol{B}$ 和垂直于 $\boldsymbol{B}$ 两个方向进行分解得

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\qquad \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2 \tag{15}$$

两式中，$\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_1$ 皆平行于 $\boldsymbol{B}$，两者必定在同一条直线上，而 $\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 皆与 $\boldsymbol{B}$ 垂直，一般而言只能确定它们必定处于同一个与 $\boldsymbol{B}$ 垂直的平面上，可称此平面为 P. 将式(15) 代入到式(13) 中可得

$$\boldsymbol{a}=\frac{q}{m}\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{B}+\frac{q}{m}\boldsymbol{E}_1+\frac{q}{m}\boldsymbol{v}_2\times\boldsymbol{B}+\frac{q}{m}\boldsymbol{E}_2 \tag{16}$$

令式(15) 中 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 各自代表的分运动的加速度满足

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_1&=\frac{q}{m}\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{B}+\frac{q}{m}\boldsymbol{E}_1\\ \boldsymbol{a}_2&=\frac{q}{m}\boldsymbol{v}_2\times\boldsymbol{B}+\frac{q}{m}\boldsymbol{E}_2\end{aligned} \tag{17}$$

在式(17) 的第一式中，因 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{B}$ 平行，所以 $\boldsymbol{v}_1$ 代表的分运动 1 将满足

$$\boldsymbol{a}_1=\frac{q}{m}\boldsymbol{E}_1$$

因 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是给定值，因此 $\boldsymbol{E}_1$ 也必定是定值，于是由上式即可知分运动 1 是沿着 $\boldsymbol{B}$ 的方向进行的匀变速直线运动. 对于式(17) 第二式，进一步将 $\boldsymbol{v}_2$ 在平面 P 内分解成 $\boldsymbol{v}_{21}$ 和 $\boldsymbol{v}_{22}$ 两个速度，即有

$$\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_{21}+\boldsymbol{v}_{22}$$

将此式代入式(17) 第二式中可得

$$\boldsymbol{a}_2=\frac{q}{m}\boldsymbol{v}_{21}\times\boldsymbol{B}+\frac{q}{m}\boldsymbol{E}_2+\frac{q}{m}\boldsymbol{v}_{22}\times\boldsymbol{B} \tag{18}$$

设 $\boldsymbol{v}_{21}$、$\boldsymbol{v}_{22}$ 代表的分运动 2 与分运动 3 的加速度分别为 $\boldsymbol{a}_{21}$ 和 $\boldsymbol{a}_{22}$，并令它们分别满足

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{21}&=\frac{q}{m}\boldsymbol{v}_{21}\times\boldsymbol{B}+\frac{q}{m}\boldsymbol{E}_2\\ \boldsymbol{a}_{22}&=\frac{q}{m}\boldsymbol{v}_{22}\times\boldsymbol{B}\end{aligned} \tag{19}$$

在分解 $\boldsymbol{v}_2$ 时完全可以令分速度 $\boldsymbol{v}_{21}$ 恰满足

$$\frac{q}{m}\boldsymbol{v}_{21}\times\boldsymbol{B}+\frac{q}{m}\boldsymbol{E}_2=0 \tag{20}$$

求解此式可得

$$\boldsymbol{v}_{21}=-\frac{1}{B^2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E} \tag{21}$$

由式(21) 即可知，分运动 2 是一个匀速直线运动，其

运动方向与 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{E}$ 确定的平面垂直. 再看式(19) 第二式,式中的 $\boldsymbol{v}_{22}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是垂直的,因此,此式可计算为

$$\boldsymbol{a}_{22}=\frac{qB}{m}v_{22}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \tag{22}$$

式中的单位矢量 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$ 与 $\boldsymbol{v}_{22}$、$\boldsymbol{B}$ 满足右手螺旋定则. 类似式(12) 中的第二式,容易证明式(22) 所描述的分运动 3 是一个发生在 P 平面中的匀速圆周运动.

考察式(17) 第一式以及式(19) 中的两式容易看到分运动 1 的加速度 $\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_{21}$、$\boldsymbol{v}_{22}$ 皆无关,而分运动 2 的加速度 $\boldsymbol{a}_2$ 也与 $\boldsymbol{v}_{22}$ 无关. 这样,依据前述命题(4) 即可知,此 3 个分运动彼此都是独立的. 也就是说,带电质点在均匀电磁场中的运动可以被分解为沿磁场方向的匀变速直线运动、沿同时垂直于磁场和电场方向的匀速直线运动和在垂直于磁场的平面内的匀速圆周运动这 3 个独立分运动.

4 结论

本文先是推导出了运动叠加原理的一种充要条件,然后利用它对三类质点运动(即抛体运动、均匀磁场中带电质点的运动、均匀电磁场中带电质点的运动) 进行了分解. 本文的工作表明,运用运动叠加原理时并不是说只要分运动相互独立就可以了,还要注意为了使运动的分解具备实际意义,应尽可能地让各分运动成为匀速直线运动、匀变速直线运动和圆周运动这样的简单运动. 此外,分解运动时,分运动并不需要必须是沿着直角坐标系的坐标轴进行的.

参 考 文 献

[1] 程守洙,江之永. 普通物理学(第 1 册)[M]. 北京:高等教育出版社,1982:25.

[2] 张东壁. 运动独立性原理并非为普适原理[J]. 教材通讯,1996(1):41-43.

[3] 张东壁,韩瑞萍. 运动独立性原理质疑[J]. 大连大学学报,1996,6(2):153-158.

[4] 周誉蔼. 关于《运动学》的几点说明[J]. 大学物理,2000,19(9):43-45.

[5] 杨习志,刘劲松. 运动具有独立性原理吗[J]. 物理教学,2015,37(11):16-18.

[6] 王京云. 探讨运动独立性的条件[J]. 太原重型机械学院学报,2000,21(4):324-329.

[7] 王运淼. 对“运动的合成与分解”的理解与教学建议[J]. 物理通报,2012(11):45-48.

A Necessary and Sufficient Condition for Motion Superposition Principle and Its Applications

XING Rong

(College of Science,Hunan University of Science and Engineering,Yongzhou,Hunan 425199)

DENG Maoyu

(Haigui Middle School,Qionghai,Hainan 571400)

Abstract:A necessary and sufficient condition for motion superposition principle has been derived. And by using the condition,decompositions of three kinds of particle motions has been discussed. The results show that a projectile motion can be decomposed into a uniform motion with the velocity equal to initial value and a free-fall motion. And a motion of a charged particle in a uniform magnetic field can be decomposed into a uniform motion in the direction of the magnetic field and a uniform circular motion in the plane perpendicular to the magnetic field. In addition,a motion of a charged particle in a uniform electromagnetic field can be decomposed into a uniform variable rectilinear motion in the direction of the magnetic field,a uniform motion in the direction perpendicular to the magnetic field and the electric filed,and a uniform circular motion in the plane perpendicular to the magnetic field.

Key words:motion superposition principle; particles; projectile motions; uniform magnetic field; uniform electric field