

利用整体法巧解两道动力学难题

郑 金

(凌源市职教中心 辽宁 朝阳 122500)

(收稿日期:2022-09-01)

摘要:利用质心坐标公式和质心运动定理推导了系统牛顿第二定律的表达式,对两道有关多个物体相对运动的动力学问题的解法进行探讨,并且给出非常巧妙的解答方法.

关键词:质点组;动力学方程;关联运动;相对加速度;整体

对于同一平面内相互作用的几个质点,无论各质点的加速度是否相同,都可选择整体为研究对象在某一方应用牛顿第二定律列方程.特别是对于多个相互作用物体的相对运动问题,利用这种整体法来解答,可化繁为简,巧妙快捷.

1 推导系统牛顿第二定律的表达式

以相互作用的两个质点沿同一直线运动为例,

$$L = \frac{L'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

化简后得

$$L' = L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (13)$$

可以发现,根据洛伦兹变换,同时修正直杆初、末坐标的表达式,得出的结果与教材中利用光线往返运动获得的结论完全一样.

而在“钟慢”效应中,在运动的高铁车厢里由于教材设计的研究过程是光线竖直射出,与高铁的水平运动方向垂直,所以在这个方向上长度不会受到相对论效应的影响,即便换成单向性的过程,运算的结果也和往返过程得出的结果没有任何差异.

5 结束语

对于教材的处理,无论是教师备课还是学生学习,都要反复精读教材中的内容,阅读的同时需要不断思考教材的行文逻辑和编写意图.

本文从教材中“尺缩钟慢”效应证明的角度出发,对课本的证明过程提出质疑,通过对比教材选取

设质点 A 和 B 的质量分别为 m_1 和 m_2 ,在某一时刻的加速度分别为 a_1 和 a_2 ,合外力大小为 F ,作用点在质点 A 上,相互作用力大小为 f ,若利用隔离法对各质点分别应用牛顿第二定律列方程,则有

$$F - f = m_1 a_1 \quad f = m_2 a_2$$

由两个方程相加得

$$F = m_1 a_1 + m_2 a_2$$

可见,这个方程不含内力,是把相互作用的两个

的物理过程与自己建立的物理过程中在推理上的差异,进一步明确了如何通过建模、分析、推理去描述狭义相对论中的“尺缩钟慢”效应.

从教研、备课的角度来说,本文的再讨论可以是作为课堂教学以及各位同行在备课时对于这一章节的教学参考资料.

从教学的角度来说,结合单元教学设计,本文的论述可以作为一次单元教学设计的单元作业,学生在理解了狭义相对论的基本原理和“尺缩钟慢”效应后对于教材上的一些证明去探究新的研究方式,提出疑问的同时也展开研究,查阅资料做出合理的论述,这也是提升学生核心素养的一次机会.

参 考 文 献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中物理课程标准(2017年版 2020年修订)[S]. 北京:人民教育出版社, 2020:4-5.
- [2] 上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会. 高中物理必修二[M]. 上海:上海科学技术出版社,2021:95, 97.
- [3] 马文蔚. 物理学下册[M]. 5版. 北京:高等教育出版社, 2006:268-269.

质点视为整体而列出的动力学方程. 这表明, 在同一直线上运动的两个质点受到的合外力, 等于各质点的质量与对应加速度乘积的矢量和.

由于相互作用的内力是成对出现的, 而且是互为相反数, 因此对质点组利用整体法列出的动力学方程中不含有内力. 对于方程右边的各项, 分别对应合外力的一个分力, 即

$$F_1 = m_1 a_1 \quad F_2 = m_2 a_2$$

下面利用质心坐标公式和质心运动定理推导质点组的系统牛顿第二定律表达式. 对于平面直角坐标系内的质点组, 系统质心的横坐标为

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_i x_i}{m_1 + m_2 + \cdots + m_i}$$

取二阶导数可得系统质心在 x 轴方向的加速度为

$$a_{Cx} = \frac{m_1 a_{1x} + m_2 a_{2x} + \cdots + m_i a_{ix}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_i}$$

由质心运动定理可知在 x 轴方向的合外力为

$$F_x = (m_1 + m_2 + \cdots + m_i) a_{Cx} = m_1 a_{1x} + m_2 a_{2x} + \cdots + m_i a_{ix}$$

即

$$F_x = \sum m_i a_{ix}$$

这表明, 对于做变速运动的各质点组成的整体, 在某一方面受到的合外力等于各质点的质量与对应加速度分量之积的矢量和. 无论各质点受到外力的作用点是否相同, 力的作用线是否重合, 各质点的加速度是否相同, 各矢量是否共线, 都可对质点组整体在某一方面应用牛顿第二定律列出一个动力学方程.

综上所述, 对于平面质点组或者连接体在平面内发生的变速运动, 都可对整体在某一方面上应用牛顿第二定律列出一个动力学方程, 只与该方向的合外力有关, 而与相互作用的内力无关. 表达式的一般形式为

$$F = \sum m_i a_i$$

2 应用系统牛顿第二定律的表达式

对有关质点组的动力学问题, 常规解法是利用隔离法由牛顿第二定律列方程, 显得很繁琐, 且易于出错. 而对质点组整体应用牛顿第二定律即利用系

统牛顿第二定律列方程, 实际是一种整体法, 只需分析整体受到的外力以及各质点加速度的大小和方向, 不必考虑相互作用的内力, 由此可化繁为简, 化难为易.

【例1】^[1] 系统如图1所示, 滑轮与绳的质量忽略, 绳不可伸长. 设系统所有的部位都没有摩擦, 物体B借助导轨(图中未画出)被限定在沿物体C的右侧面运动, 已知物体A、B、C的质量分别为 m_A 、 m_B 、 m_C , 试求物体C运动的加速度 a_C .

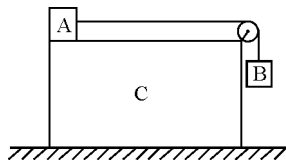


图1 例1题图

原解^[1]: 取物体系统为研究对象, 由于A、B、C组成的系统在水平方向上动量守恒, 则

$$m_A v_A = (m_B + m_C) v_C \quad (1)$$

再隔离A和B, 由于A和B相对于C的加速度大小相等, 设为 a , 则A对地的加速度为 $a_A = a - a_C$, 方向向右; B对地的加速度可分解为两个分量, 竖直向下的分量 $a_{By} = a$, 水平向左的分量 $a_{Bx} = a_C$. 设绳的拉力为 T , 分析A水平方向和B竖直方向的受力情况, 根据牛顿第二定律, 对A有

$$T = m_A a_A$$

即

$$T = m_A (a - a_C) \quad (2)$$

对于B, 在竖直方向有 $m_B g - T = m_B a_{By}$, 即

$$m_B g - T = m_B a \quad (3)$$

联立方程(2)、(3)得

$$a = \frac{m_B g + m_A a_C}{m_A + m_B} \quad (4)$$

又因为A、C均做初速度为零的匀加速直线运动, 由速度公式得

$$v_A = a_A t = (a - a_C) t \quad (5)$$

$$v_C = a_C t \quad (6)$$

联立方程(1)、(4)、(5)、(6)可得

$$a_C = \frac{m_A m_B g}{(m_A + m_B)(m_A + m_B + m_C) - m_A^2}$$

点评: 在惯性系中应用牛顿第二定律列方程, 要

注意加速度是对地的绝对加速度. 除了列出动力学方程, 还需列出动量守恒方程, 并且能够判断物体做匀加速运动, 利用运动学公式列出两个方程.

新解:以地面为参考系, 设 A 向右运动的加速度大小为 a_A , B 向下运动的加速度大小为 a_{By} , B 与 C 一起向左运动的加速度大小为 a_C , 则 A 与 B 相对于 C 运动的加速度大小为

$$a = a_{By}$$

由于 A 与 C 运动方向相反, 则相对加速度大小为

$$a = a_A + a_C$$

对 A、B 整体在细绳张力方向由牛顿第二定律有

$$m_B g = m_A a_A + m_B a_{By}$$

对 A、B、C 整体在水平方向由牛顿第二定律有

$$0 = m_A a_A - (m_B + m_C) a_C$$

联立上式可得

$$a_C = \frac{m_A m_B g}{(m_A + m_B)(m_B + m_C) + m_A m_B}$$

点评:首先要设置各质点加速度物理量的符号, 明确各加速度之间的关系, 即物体 B 运动的加速度在水平方向的分量与物体 C 的加速度相同, 在竖直方向的分量与物体 A 相对于物体 C 运动的加速度大小相等. 整个解题过程只需对加速度设置 4 个未知量, 列出 4 个方程, 其中两个方程用来反映某一方向的相对加速度与绝对加速度的关系; 另外两个方程用来反映质点组在某一方向受到的合外力与加速度和质量的关系.

【例 2】^[2] 如图 2 所示, 在一质量为 M 的小车上放一质量为 m_1 的物块, 它用细绳通过固定在小车上的滑轮与质量为 m_2 的物块相连, 物块 m_2 靠在小车的前壁上而使悬线竖直. 忽略所有摩擦, 问: (1) 当用水平力 F 推小车使之沿水平桌面加速前进时, 小车的加速度多大? (2) 如果要保持 m_2 的高度不变, 力 F 应该多大?

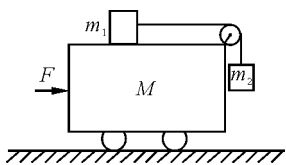


图 2 例 2 题图

原解:(1)^[2] 分析小车和两个物块受力如图 3 所示. 各力之间的关系为 $T_1 = T'_1 = T_2 = T'_2$, $N = N'$. 以小车为参考系, 物块 m_1 和 m_2 的相对加速度分别为 a_1 和 a_2 , 则二者大小相等, 即 $a_1 = a_2$.

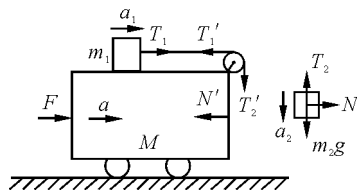


图 3 分析各质点受力

设小车的加速度大小为 a , 方向向右, 若以小车为参考系, 则 m_1 受到向左的惯性力大小为 $m_1 a$, 对 m_1 沿水平方向由牛顿第二定律有

$$T_1 - m_1 a = m_1 a_1$$

对 m_2 沿竖直方向有

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2$$

联立各式得

$$a_1 = \frac{m_2 g - m_1 a}{m_1 + m_2} \quad T_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (g + a)$$

对 m_2 沿水平方向有

$$N = m_2 a$$

对小车沿水平方向有

$$F - N' - T'_1 = Ma$$

联立这 3 个方程, 考虑到 $T_1 = T'_1$, $N = N'$, 可得

$$a = \frac{1}{M + m_2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \left(F - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \right) = \frac{F(m_1 + m_2) - m_1 m_2 g}{(M + m_2)(m_1 + m_2) + m_1 m_2}$$

(2)^[3] 如果 m_2 的高度保持不变, 则相对加速度 $a_1 = 0$, 由

$$a_1 = \frac{m_2 g - m_1 a}{m_1 + m_2}$$

可得

$$a = \frac{m_2}{m_1} g$$

代入小车的加速度关系式可得推力大小为

$$F = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g + \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} + m_2 + M \right) \frac{m_2}{m_1} g = \left(\frac{m_1^2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} + m_2 + M \right) \frac{m_2}{m_1} g =$$

$$\frac{(M+m_1+m_2)m_2g}{m_1}$$

点评:对于第(1)问,在非惯性系中应用牛顿第二定律列方程时,需对 m_1 考虑惯性力.对于第(2)问,是利用第(1)问所得加速度代入特殊条件来求作用力,需对作用力的表达式进行化简,难度较大.

新解:(1)以地面为参考系,设小车的加速度大小为 a ,物块 m_1 的加速度大小为 a_1 ,物块 m_2 向下运动的加速度分量 a_{2y} .若物块 m_1 相对于小车向右运动,则 m_1 相对于小车运动的加速度大小为 $a'=a_1-a$.物块 m_2 向下运动的加速度分量与物块 m_1 相对于小车运动的加速度大小相等,即 $a_{2y}=a'$.对 m_1 、 m_2 整体在沿绳移动方向由牛顿第二定律有

$$m_2g = m_1a_1 + m_2a_{2y}$$

对三者整体在水平方向由系统牛顿第二定律有

$$F = m_1a_1 + (M+m_2)a$$

联立方程可得

$$a = \frac{F(m_1+m_2) - m_1m_2g}{(M+m_2)(m_1+m_2) + m_1m_2}$$

(2)若物块 m_2 的高度保持不变,则三者的相对位置保持不变,加速度相同,对整体在水平方向由牛顿第二定律有

$$F = (M+m_2+m_1)a$$

对 m_1 和 m_2 整体在沿绳方向由系统牛顿第二定律有

$$m_2g = m_1a$$

联立方程可得

$$F = (M+m_1+m_2)\frac{m_2}{m_1}g$$

点评:对第(1)问,需首先对加速度设置未知量符号,并且设定物块 m_1 相对于小车的运动方向,以便确定相对加速度与各加速度之间的数量关系.此外,物块 m_2 的加速度在水平方向的分量与小车的加速度相同,在竖直方向的绝对加速度等于相对加速度.在应用系统牛顿第二定律列方程时,需选择不同的整体作为研究对象,并且选择正方向,分析整体受力情况以及各物体的加速度大小和方向.

还需讨论小车向左或向右运动的受力条件以及两个物体相对于小车向左或向右运动的条件^[2].若推力 F 维持小车刚好静止不动,则 m_1 和 m_2 一起加

速运动,因此二者的加速度大小相等,即为

$$a = \frac{m_2}{m_1+m_2}g$$

对整个系统在水平方向由牛顿第二定律有 $F=m_1a$,可知最小推力 $F_{\min} = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}g$.当 $F > F_{\min}$ 时小车向右运动.

当两个物体相对于小车静止时,水平推力的临界值为 $F_0 = (M+m_1+m_2)\frac{m_2}{m_1}g$.若 $F > F_0$,则 m_1 相对于车向左运动;若 $F_{\min} \leq F < F_0$,则 m_1 相对于车向右运动,但 m_1 相对于地面始终向右运动.

由于例1是例2的特例,那么在解题时应用的规律和方法具有某些相似之处,利用例2第(1)问的结果,令 $F=0$,可得小车的加速度为负值,其绝对值跟例1的结果相一致.

3 结束语

综上所述,由于模型中相互作用的物体个数较多,相对运动过程比较复杂,如果利用隔离法进行解答,过程繁琐,难度较大,而且易于出错.在地面参考系中利用整体法对质点组列出动力学方程的解法最简单.关键是在地面参考系中对3个物体分别设置加速度物理量符号,并且能够确切分析相对加速度与3个加速度之间的数量关系.在利用整体法对质点组列出动力学方程时,要明确选择研究对象与正方向,其中在水平方向以3个物体为研究对象;在沿绳移动方向以两个物体为研究对象.利用整体法对质点组列出动力学方程,不必分析系统内相互作用的力,可减少未知量与方程的个数,由此可化繁为简,显得巧妙快捷.此外,应用系统牛顿第二定律列方程要比应用质心运动定理列方程简便,有助于拓展解题思路和方法,提高解题的效率和效果.

参考文献

- [1] 周长春. 从一道力学综合题谈物理情景的建构[J]. 物理通报, 2006, 25(12): 8-10.
- [2] 曾乐贵, 曾小妮. 对一个非惯性系力学问题的探讨[J]. 物理通报, 2012, 31(7): 114-115.
- [3] 夏清华. 一道动力学问题的求解[J]. 物理通报, 2012, 31(1): 59-60.