



一道以“磁阱”为背景的物理竞赛题的 数学应用分析*

王 勇

(常州高级中学 江苏 常州 213000)

(收稿日期:2022-09-06)

摘 要:通过一道以磁阱为背景的复赛题论述了行列式、泰勒级数、极值求解等数学工具在物理竞赛中的应用. 将物理与数学两者融合在一起,使物理问题顺利转化为数学模型,在创新拔尖人才培养中落实和提升学生应用数学知识处理物理问题的能力.

关键词:磁阱;矢量运算;行列式;泰勒多项式

数学作为逻辑推理和抽象思维的有力工具,能帮助人们把握事物的本质及其内在联系.自2016年开始实行的新版《全国中学生物理竞赛内容提要》对相关的物理竞赛内容做了适当的拓展和补充,同时提升了应用数学处理物理问题的能力要求,如增加了矢量运算和微积分及其应用等^[1-4].

第35届物理竞赛复赛题中的一道以磁阱为背景的复赛题讨论4根无限长对称分布的直导线空间的磁场,物理知识层面上涉及到毕奥-萨伐尔定律、安培环路定理、磁束缚势能等物理规律和概念,在数学应用上,当应用安培环路定理计算通电导线周围的磁场时涉及到矢量的分解、叉乘运算,当近似求4根通电导线在中心点附近处的磁场时涉及到二元函数的近似处理,当讨论4根通电导线在二维平面内的磁感应强度的极值时涉及到二元函数的极值处理.本文以此电磁学复赛题为例谈谈行列式、泰勒级数、极值求解等数学工具在物理竞赛中的应用.

【题目】loff-Pritchard 磁阱可用于来束缚原子的运动,其主要部分如图1所示.4根均通有恒定电流 I 的长直导线1、2、3、4都垂直于 $x-y$ 平面,它们与 $x-y$ 平面的交点是边长为 $2a$ 、中心在原点的正方形的顶点,导线1、2所在平面与 x 轴平行,各导线中电流方向已在图中标出.整个装置置于匀强磁场 $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{k}$ (\mathbf{k} 为 z 轴正方向的单位矢量)中.已知真空磁导率为 μ_0 .

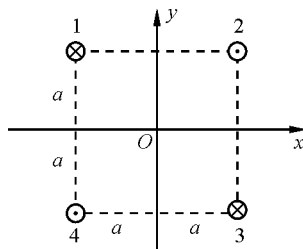


图1 题图

(1) 求电流在通电导线外产生的总磁场的空间分布.

(2) 电流在原点附近产生的总磁场的近似表达式,保留至线性项.

(3) 将某原子放入磁阱中,该原子在磁阱中所受的磁作用束缚势能正比于其所在位置的总磁感应强度的大小,即磁作用束缚势能 $V(0) = \mu B$, μ 为正的常量.求该原子在原点 O 附近所受的作用力.

(4) 在磁阱中运动的原子最容易从 $x-y$ 平面上什么位置逸出?求刚好能够逸出磁阱的原子的动能.

1 矢量叉乘 行列式表示

矢量的叉乘在物理学上有广泛的应用,如力矩、角动量、洛伦兹力等,三维空间两个矢量叉乘 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$, \mathbf{C} 的大小为 $AB \sin \theta$,方向由右手螺旋定则确定.矢量叉乘可用行列式形象地表示三维空间各个物理量的大小.

* 江苏省中小学教学第十四期研究课题“普通高中创新拔尖后备人才成长规律与培养机制研究”阶段性研究成果,课题编号:2021JY14-XK21.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$$

$$\mathbf{i} \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} =$$

$$\mathbf{i}(A_y B_z - A_z B_y) - \mathbf{j}(A_x B_z - A_z B_x) +$$

$$\mathbf{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

对于一根无限长的通电直导线,由安培环路定理可得

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \mathbf{n} \times \mathbf{r}$$

式中 \mathbf{n} 为电流 I 方向的单位向量,导线 1 电流 I 方向的单位向量 $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$, 在 $x-y$ ($z=0$) 平面上任意一点处,有 $\mathbf{r} = (x+a, y-a, 0)$, 则有

$$\mathbf{n} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -1 \\ x+a & y-a & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\mathbf{i} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ y-a & 0 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ x+a & 0 \end{vmatrix} +$$

$$\mathbf{k} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x+a & y-a \end{vmatrix} =$$

$$\mathbf{i}(y-a) - \mathbf{j}(x+a)$$

则通电导线 1 在 $x-y$ ($z=0$) 平面上任意一点的磁感应强度为

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\mathbf{i}(y-a) - \mathbf{j}(x+a)}{(x+a)^2 + (y-a)^2}$$

同理可得导线 2、3、4 在空间的磁感应强度的表达式 \mathbf{B}_2 、 \mathbf{B}_3 、 \mathbf{B}_4 . 4 根导线在空间的磁感应强度累加 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4$, 得到总磁场的空间分布 (x 、 y 分量式) 为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot$$

$$\left[\frac{(y-a)}{(x+a)^2 + (y-a)^2} - \frac{(y-a)}{(x-a)^2 + (y-a)^2} + \right.$$

$$\left. \frac{(y+a)}{(x-a)^2 + (y+a)^2} - \frac{(y+a)}{(x+a)^2 + (y+a)^2} \right] \mathbf{i} +$$

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{-(x+a)}{(x+a)^2 + (y-a)^2} + \frac{(x-a)}{(x-a)^2 + (y-a)^2} - \right.$$

$$\left. \frac{(x-a)}{(x-a)^2 + (y+a)^2} + \frac{(x+a)}{(x+a)^2 + (y+a)^2} \right] \mathbf{j}$$

2 二元函数的近似处理 泰勒公式

泰勒多项式是一个用函数在某点的信息描述其附近取值的公式. 如果函数满足一定的条件, 泰勒多

项式可以用函数在某一点的各阶导数值做系数构建一个多项式来近似表达这个函数.

当需要近似的函数为二元函数时, 可用二元函数的泰勒多项式展开, 设如果函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内具有直到 $(n+1)$ 阶的连续偏导数, (x_0+x, y_0+y) 为此邻域内任一点, 则二元泰勒多项式为

$$f(x_0+x, y_0+y) = f(x_0, y_0) +$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) +$$

$$\frac{1}{2!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) + \dots +$$

$$\frac{1}{n!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) +$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} \cdot$$

$$f(x_0+\theta x, y_0+\theta y) \quad (0 < \theta < 1)$$

现以 B_{1x} 为例

$$B_{1x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{y-a}{(x+a)^2 + (y-a)^2}$$

B_{1x} 为关于 x 、 y 的二元函数, 取中心点附近近似, 则有 x_0 、 y_0 均为零, 由于只要近似到线性项 (一次函数), 因此只需要取二元泰勒多项式的前两项, 第一项为

$$f(0, 0) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

第二项有

$$\frac{\partial B_{1x}}{\partial x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{-2(x+a)(y-a)}{[(x+a)^2 + (y-a)^2]^2}$$

$$\frac{\partial B_{1x}}{\partial y} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{(x+a)^2 - (y-a)^2}{[(x+a)^2 + (y-a)^2]^2}$$

则 B_{1x} 一次泰勒展开式为

$$B_{1x}(x, y) = f(x_0, y_0) + \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) =$$

$$f(0, 0) + \left[x \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} + y \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} \right] =$$

$$-\frac{\mu_0 I}{4\pi a} + \frac{\mu_0 I x}{4\pi a^2} = \frac{\mu_0 I (x-a)}{4\pi a^2}$$

同理对其他 7 项也取近似, 则原点附近的总磁场的近似表达式为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I (xi - yj)}{\pi a^2}$$

在整个空间除了 4 根通电导线的磁场外还存在附加匀强磁场, 则在原点附近的磁场为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I x}{\pi a^2} \mathbf{i} - \frac{\mu_0 I y}{\pi a^2} \mathbf{j} + B_0 \mathbf{k}$$

则在原点附近磁感应强度大小为

$$B(r) = \sqrt{B_0^2 + \left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\right)^2 (x^2 + y^2)} = \sqrt{B_0^2 + \left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\right)^2 r^2}$$

其中 r 为原点附近点到中心点 O 的距离. 原子在该点的磁作用束缚势能为

$$V(r) = \mu B(r) = \mu \sqrt{B_0^2 + \left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\right)^2 r^2}$$

3 一元函数的近似处理 泰勒公式

泰勒多项式: 如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个区间 (a, b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数, 则对任意 $x \in (a, b)$, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{n+1}[x_0 + \theta(x - x_0)]}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

磁作用束缚势能是关于 r 的一元函数, 展开式第一项

$$V(0) = \mu B_0$$

第二项为

$$V'(r) = \mu \frac{\left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\right)^2 r}{\sqrt{B_0^2 + \left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\right)^2 r^2}}$$

则有

$$V'(0) = 0$$

第三项

$$V''(r) =$$

$$\mu \frac{\left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\right)^2 \sqrt{B_0^2 + \left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\right)^2 r^2} - \frac{\left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\right)^4 r^2}{\sqrt{B_0^2 + \left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\right)^2 r^2}}}{B_0^2 + \left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\right)^2 r^2}$$

则有

$$V''(0) = \mu \frac{\left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\right)^2}{B_0}$$

磁作用束缚势能前两项展开式为

$$V(r) \approx \mu B_0 + \frac{\mu}{2B_0} \left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\right)^2 r^2$$

除去第一项的常数项外, 发现第二项为二维平

面内的振子简谐势能, 所以该原子在中心附近所受的磁场作用力为指向中心的力

$$F = -\frac{\mu}{B_0} \left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\right)^2 r$$

4 二元函数的极值求解 导数法

磁阱利用两个平行的电流方向相反的线圈或多根反对称无限长的通电直导线构成, 这种阱中心的磁场为零, 向四周磁场不断增强. 陷在阱中的原子具有磁矩, 在中心时势能最低, 在中心位置 4 根无限长导线的合磁场的磁感应强度为零, 此中心位置磁作用束缚势能最低, 利用电磁场形成的一种“势能坑”原子可以被收集在坑内存起来. 若要求在 $x-y$ 平面上原子最容易溢出的位置, 也就是要求在 $x-y$ 平面上磁感应强度的极值位置.

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内连续且具有一阶及二阶连续偏导数, 又因为函数在该点 $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$, 令 $f_{xx}(x_0, y_0) = A, f_{xy}(x_0, y_0) = B, f_{yy}(x_0, y_0) = C$, 则 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处是否取得极值的条件如下:

$AC - B^2 > 0$ 时具有极值, 且当 $A < 0$ 时有极大值, 当 $A > 0$ 时有极小值.

$AC - B^2 < 0$ 时无极值.

$AC - B^2 = 0$ 时有可能有极值, 也可能没有极值.

$$\text{令 } k = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\right)^2$$

$$m = \frac{(y-a)}{(x+a)^2 + (y-a)^2} - \frac{(y-a)}{(x-a)^2 + (y-a)^2} + \frac{(y+a)}{(x-a)^2 + (y+a)^2} - \frac{(y+a)}{(x+a)^2 + (y+a)^2}$$

$$n = \frac{(x+a)}{(x+a)^2 + (y-a)^2} + \frac{(x-a)}{(x-a)^2 + (y-a)^2} - \frac{(x-a)}{(x-a)^2 + (y+a)^2} + \frac{(x+a)}{(x+a)^2 + (y+a)^2}$$

则 $x-y$ 平面上任意一点的磁作用束缚势能为

$$V(r) = \mu B(r) = \mu \sqrt{B_0^2 + k(m^2 + n^2)}$$

磁作用束缚势能对 x, y 求偏导数使 $V_x(x, y) = 0,$

$V_y(x, y) = 0$, 可得 $x-y$ 平面上 $(0, -\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt[4]{3}}), (0, \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt[4]{3}}), (0, 0), (-\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt[4]{3}}, 0), (\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt[4]{3}}, 0)$ 5 个点存在极值

点. 验证后发现 $(0, -\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}})$ 、 $(0, \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}})$ 、 $(-\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}, 0)$ 、

$(\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}, 0)$ 这 4 个位置磁作用束缚势能存在极大值

(以上过程通过 Mathematica 计算软件计算实现). 观察计算结构可以发现极大值所处的位置分别位于 x 、 y 轴上. 若将 a 赋值为 4, 通过 Mathematica 软件在 x - y 平面内作出如图 2 所示的磁作用束缚势能分布图和如图 3 所示的 x 、 y 轴上磁作用束缚势能大小随 x 、 y 变化的图像, 两图像直观地显示磁作用束缚势能的分布.

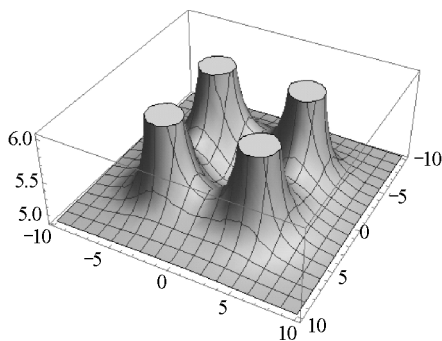


图 2 磁作用束缚势能分布图

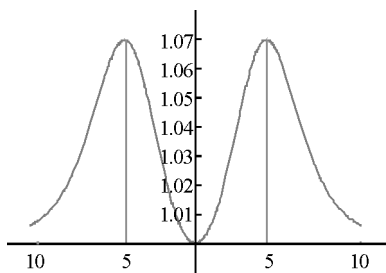


图 3 磁作用束缚势能大小随 x 、 y 变化的图像

原子在 $(0, -\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}})$ 处的磁作用束缚势能

$$V(r) = \mu \sqrt{B_0^2 + \frac{3\sqrt{3}}{8} \left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \right)^2}$$

原子在原点处的磁作用束缚势能

$$V(r) = \mu B_0$$

则原子刚好能逃出磁阱的动能为

$$E_k = \mu \sqrt{B_0^2 + \frac{3\sqrt{3}}{8} \left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \right)^2} - \mu B_0$$

总之数学工具的应用为物理问题的解决提供了新思路、新方法和新途径, 是学生应具备的核心素养之一. 在创新拔尖人才培养的教学实践中既要为学生提供扎实的物理知识, 还要为学生提供相关的数学知识, 以使物理与数学能够在学生的大脑中并列出现, 不断地通过联想和迁移将两者融合在一起, 使物理问题顺利转化为数学建模, 灵活机智地在数学与物理之间变换, 在物理教学中落实和提升学生应用数学知识处理物理问题的能力.

参考文献

- [1] 朱海英. 巧用数学方法“乘风破浪”解题 ——2020 年高考物理选择题解决的数学方法应用赏析[J]. 物理教学, 2021(2): 67-68.
- [2] 张彦, 张登, 红袁萍. 物体连滚带滑力学问题的分析与求解 ——以第 37 届全国中学生物理竞赛复赛试题第二题为例[J]. 物理教学, 2021(6): 67-70.
- [3] 赵凯华. 电磁学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011: 289.
- [4] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007: 73-119.

Analysis on the Application of Mathematics in a Physics Competition Question with the Background of “Magnetic Trap”

WANG Yong

(Changzhou Senior High School, Changzhou, Jiangsu 213000)

Abstract: This paper discusses the application of mathematical tools such as Determinant, Taylor series and extreme value solution in the physics contest through an example of a semi-final question with a magnetic trap as the background. The integration of physics and mathematics enables the smooth transformation of physical problems into mathematical models, and the implementation and improvement of students' ability to deal with physical problems with Applied mathematics knowledge in the training of innovative top-notch talents.

Key words: magnetic trap; vector operation; determinant; Taylor polynomial