浅析光滑水平面上圆弧槽物块下滑的最值问题

孙朝晖　池英芝　梅　尹
（宁波市北仑中学　浙江 宁波　315800）

（收稿日期：2022－09－06）

摘　要：通过对圆弧槽物块模型的运动及受力分析，定性解释了物块对地速度变化的规律；并通过严格的物理公式推导，证明物块对地速度最大值不一定在最低点时取到，而是取决于圆弧槽与物块的质量比 k；物块相对于圆弧槽的速度最大值以及受到圆弧槽弹力的最大值确实在最低点取到．最后在 $k=1$ 的情况下验证了定性、定量分析的正确性．

关键词：动量守恒；机械能守恒；最大速度；最大弹力；圆弧槽物块模型；临界质量比

情形描述：光滑水平面上有一水平方向可自由移动且槽表面光滑的四分之一圆弧槽，如图 1 所示，其质量为 M，圆弧所对半径为 R；圆弧槽顶端静止释放一质量为 m 且可视为质点的光滑物块，最后物块于圆弧槽最低点分离（不考虑 $m \gg M$ 时，圆弧槽逆时针倾倒的情形）．由圆弧槽和物块所构成的孤立二体系统在自由光滑水平面上，由重力引起内力相互作用，从而自主运动，系统质心水平方向保持不动，

考虑圆形线圈恰能从磁场中逃逸的情况：当 $n \to \infty$ 时，有 $v \to 0$．代入式（21）得，圆形线圈恰能从磁场逃逸的最小初速度 $v'_{\min}$

$$v'_{\min}=\frac{\mu_0^2 I_0^2 a}{mR}\cdot\left[2\sqrt{n_0^2+2n_0}-2n_0+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{n_0+2}{n_0}\right)\right] \quad (22)$$

圆形线圈在无限长直导线磁场的 v－x 图像、逃逸最小初速度-电流图像与图 3、图 4 类似，本文不再赘述．

4　总结

依据教育部考试中心 2019 年发布的《中国高考评价体系》，命题要关注“一核四层四翼”的命题设计，更要关注学科核心素养的深层次考查．本题模型从命题角度看很符合上述命题设计要求，创新度高，设问不难，却很好地考查了学生思维灵活性和学科核心素养．但是，命题的正确性和严谨性是基本要求，不能出现原理性漏洞，甚至是错误．

本文从牛顿运动学方程出发，分析矩形和圆形线圈在无限长载流直导线磁场中的运动，分析线圈恰能从磁场逃逸的临界初速度．从数学上证明了：当长直导线的电流越大，线圈初始位置距离导线越近时，线圈能够逃逸所需的初速度越大；当初速度较小时，线圈无法从长直导线产生的磁场中逃逸．此外，本文在计算时假设流经无限长直导线的电流较大（～10^6 A），而这种情况在现实中是很难用实验呈现的．

本题题设诸多条件未给出，因此无法判断线圈能否从长直导线产生的磁场中逃逸，建议题干中添加“直导线中电流较大”这个暗示性语句，来保证试题的严谨性．

致谢：本文感谢黄吉平老师的有益探讨和修改建议．

参 考 文 献

[1] 邹俊峻．长直交变电流磁场中圆线圈的感应电动势和感应电流[J]．物理通报，2019(3)：8－10．

[2] 黄章科，金春辉，穆成富，等．任意形状磁场区域感生电动势的研究[J]．大学物理，2015，34(12)：45－49，60．

水平动量恒为零.

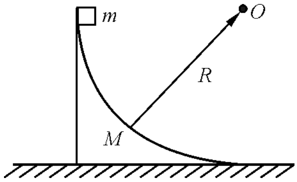

图 1　圆弧槽物块系统模型

上述圆弧槽物块模型时常在高中物理动量守恒定律习题中出现[1-3]. 对物块运动及受力最值问题的认识,学生们想当然认为当物块下滑到最低点时对地速度最大,受圆弧槽的弹力也最大,但缺乏严格推证,而事实并非绝对如此[4-6]. 下文将研究从物块释放到与圆弧槽分离过程中,物块对地、对圆弧槽速度大小以及物块与圆弧槽之间弹力大小等物理量的变化规律及最值问题.

1　定性分析

当圆弧槽固定,物块自由下滑,其对地速度一直增大,这是因为在此过程中,重力一直做正功,而弹力的方向一直垂直于物块对地速度方向,故弹力做功一直为零. 正是基于这样的认知,学生会误认为当圆弧槽可水平自由移动时物块对地速度也一直增大,下文将解释该问题.

当圆弧槽不固定,由于水平方向系统动量恒为零,而圆弧槽所受弹力使其水平加速,故物块水平分速度一直增大;但竖直方向情况就不同了. 物块自由释放,一开始竖直分速度为零,最后物块由圆弧槽最低点离开时对地速度方向水平,其竖直分速度也为零,故物块竖直分速度存在由零增大的过程,也存在减小至零的过程. 物块对地速度为水平、竖直分速度的矢量和. 一开始,水平、竖直分速度均增大,故对地速度增大;但当物块即将离开圆弧槽最低点,水平分速度增大而竖直分速度减小,两矢量之和变化情况不好判断,即最后物块对地速度到底是增大还是减小就不一定了.

当物块质量足够大时,物块在整个过程中水平分速度的变化范围远小于竖直分速度的变化范围,而竖直分速度可认为先增大再减小. 若忽略水平分速度,则物块对地速度也是先增大再减小;当物块质量足够小时,可认为圆弧槽固定不动,物块整个过程中对地速度显然一直增大. 思考以上两极端情形,猜想可能存在圆弧槽与物块的临界质量比 $k_{临界}$,当 $k \geqslant k_{临界}$ 时,物块对地速度一直增加直到最低点;当 $k < k_{临界}$ 时,物块对地速度先增后减. 下文将定量分析物块对地速度及相关物理量的变化趋势.

2　物块对地速度 v_1

如图 2 所示,设当物块所经过圆弧弧度为 θ 时,物块对地速度为 $v_1(\theta)$(可简写为 v_1),此时 v_1 的方向并非垂直于物块与 O 点的连线,而是由物块相对于圆弧槽的速度 $v_{相}$ 与圆弧槽的对地速度 v_2 的矢量和的方向确定.

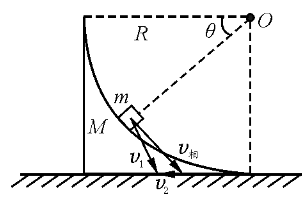

图 2　物块速度矢量分析

物块在如图 2 所处的位置,重力势能转化成系统的动能,故有下式

$$mgR\sin\theta = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 \tag{1}$$

由系统在水平方向上动量恒为零可得

$$Mv^2 = m(v_{相}\sin\theta - v^2) \tag{2}$$

v_1、v_2 与 $v_{相}$ 之间由矢量的几何关系可得

$$(v_{相}\sin\theta - v^2)^2 + (v_{相}\cos\theta)^2 = v_1^2 \tag{3}$$

令圆弧槽与物块的质量比 $\frac{M}{m} = k$,由以上三式可解得 v_1 以及 $v_{相}$ 关于 θ 的表达式为

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gR\sin\theta(k^2 + 2k\cos^2\theta + \cos^2\theta)}{k^2 + (1+\cos^2\theta)k + \cos^2\theta}} \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \tag{4}$$

$$v_{相} = \sqrt{\frac{k+1}{k+\cos^2\theta} \cdot 2gR\sin\theta} \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \tag{5}$$

由式(5)根号下正弦余弦的形式可知该函数单调递增,即物块相对于圆弧槽的速度一直增加,在最

低点 $v_{相}$ 取到最大值.为求 v_1 的最大值,设如下函数 $f(\theta)$,对其求最大值即可.

$$f(\theta)=\frac{v_1^2}{2gR}=\sin\theta\frac{k^2+2k\cos^2\theta+\cos^2\theta}{k^2+(1+\cos^2\theta)k+\cos^2\theta}$$

$$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \tag{6}$$

$$f'(\theta)=\frac{\cos\theta}{(k+1)(k+\cos^2\theta)^2}\cdot[(2k+1)\cos^4\theta+(5k^2+3k)\cos^2\theta+k^3-2k^2-2k]$$

$$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \tag{7}$$

对式(7)进行研究,发现其不一定在 θ 的定义域内恒正,故并非一定单调递增,而是跟式(7)中中括号内 k^3-2k^2-2k 的正负有关.当 $k^3-2k^2-2k=0$ 可解得临界质量比 $k_{临界}=1+\sqrt{3}$.

当 $k\geqslant k_{临界}$ 时,$f(\theta)$ 单调递增,如图 3 中 $k=10$、5、3,物块对地速度一直增加直到最低点.

当 $k<k_{临界}$ 时,$f(\theta)$ 先增后减,如图 3 中 $k=1$、0.5、0.1,物块对地速度也先增后减.

$f'(\theta)$ 正负的变化与 k 的大小有关,所以最大值不一定在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时取到.根据图 3 可以看出,物块沿圆弧槽下滑过程中,根据 k 的大小不同,v_1 可能随 θ 单调递增,也可能先增再减.

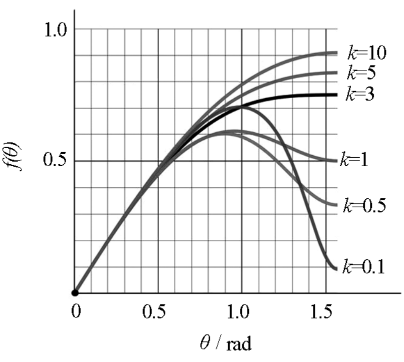

图 3 不同质量比下 $f(\theta)$ 单调性分析

令 $f'(\theta)=0$,求解式(7)中括号内关于 $\cos^2\theta$ 的一元二次方程,将解对应的 θ 值代入式(1)即可求出 v_1 的最大值.从而证明物块对地速度最大值不一定在最低点时取到,与 k 相关.需要注意的是,对于圆弧槽物块模型,并非 k 在正数范围内物块都能沿圆弧槽面滑到最低点.当 k 较大时会涉及到圆弧槽翻转的问题,下文对弹力分析时会提及.

3 物块所受圆弧槽弹力 T

物块相对于圆弧槽做圆周运动,如图 4 所示对物块受力分析,受重力 mg、圆弧槽弹力 T 以及在以圆弧槽为非惯性系下的惯性力 $F_{惯}$.通过式(8)、(9)、(10)可解得弹力的表达式.

$$T\cos\theta=Ma_M \tag{8}$$

$$F_{惯}=ma_M \tag{9}$$

$$F_n=\frac{mv_{相}^2}{R}=T-mg\sin\theta+F_{惯}\cos\theta \tag{10}$$

$$T=kmg\sin\theta\left[\frac{2k+2}{(k+\cos^2\theta)^2}+\frac{1}{k+\cos^2\theta}\right] \tag{11}$$

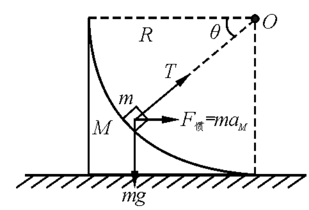

图 4 非惯性系下物块受力分析

由 T 的表达式易知其在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内单调递增,故圆弧槽对物块弹力最大值在最低点时取到.需要注意的是在物块下滑过程中,当 k 较大时,以圆弧槽左下端点为力矩参考点,可能会出现弹力逆时针的力矩大于圆弧槽重力的力矩,从而使圆弧槽逆时针翻转,本文在圆弧槽不翻转的前提下进行研究.

4 质量比 $k=1$ 时的速度和弹力

4.1 速度最大值

当 $\frac{M}{m}=k=1$ 时,有 $M=m$,物块到达水平面时重力势能转化为两者的动能

$$mgR=\frac{1}{2}mv^2\cdot 2 \qquad v=\sqrt{gR} \tag{12}$$

对于式(7),在 $k=1$ 时令 $f'(\theta)=0$,则有

$$f'(\theta)=\frac{\cos\theta}{2(1+\cos^2\theta)^2}[3\cos^4\theta+8\cos^2\theta-3]=0$$

$$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

解得

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3} \tag{13}$$

当 θ 值满足式(13)的条件时，物块的重力势能转化为两者的动能，可得

$$mgR\sin\theta=\frac{1}{2}mv_x^2+\frac{1}{2}mv^2 \tag{14}$$

因物块和圆弧槽质量相同，故两者对地水平分速度大小时刻相同. 而物块对地速度 v 等于物块相对于圆弧槽做圆周运动的速度 $v_{相}$ 与圆弧槽相对于地面的速度 v_x 的矢量之和，如图 5 矢量所示. 而物块对地速度 v 的水平分量同样为 v_x，可得

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{v_y}{v_{相}}=\frac{\sqrt{v^2-v_x^2}}{\sqrt{v^2-v_x^2+(2v^x)^2}}$$

解得

$$v_x=\frac{\sqrt{3}}{3}v \tag{15}$$

由式(14)和式(15)解得物块对地速度的最大值为

$$v=\sqrt{\frac{\sqrt{6}}{2}gR} \tag{16}$$

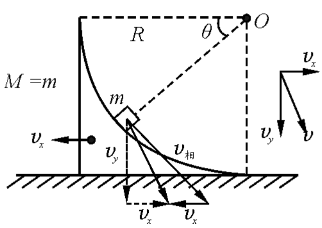

图 5　质量比 $k=1$ 时物块速度矢量分析

式(16)物块对地速度的最大值确实大于式(12)中物块在水平面的速度. 另外，图 6 也能看出，物块对地速度先增后减.

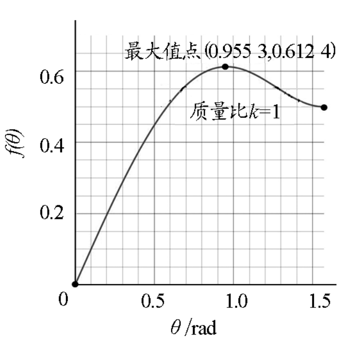

图 6　质量比 $k=1$ 时 $f(\theta)$ 单调性分析

4.2　弹力最大值

由式(11)可知当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时弹力的最大值

$$T_{\max}=5mg$$

另一方面，由式(12)和 $k=1$ 可知

$$v_{相}=2\sqrt{gR} \tag{17}$$

$$F_n=\frac{mv_{相}^2}{R}=T-mg \tag{18}$$

由上述两式也可验证

$$T_{\max}=5mg$$

5　结论

综上所述，可得如下结论：

(1) 物块相对于圆弧槽的速度 $v_{相}$ 一直增加，在最低点取到最大值.

(2) 物块对地速度 v_1 并非一直增加而是跟圆弧槽与物块的质量比 k 有关，令 $k_{临界}=1+\sqrt{3}$，则：

当 $k\geqslant k_{临界}$ 时，物块对地速度一直增加直到最低点；

当 $k<k_{临界}$ 时，物块对地速度先增后减.

(3) 物块下滑过程中，存在另一临界质量比 $k_{翻转}$，当 $k>k_{翻转}$，以圆弧槽左下端点为力矩参考点，会出现弹力逆时针的力矩大于圆弧槽重力的力矩，使圆弧槽逆时针翻转，由于翻转的情形过于复杂，本文在圆弧槽不翻转的前提下进行研究. 故本文 k 的取值范围为 $0<k<k_{翻转}$.

(4) 物块所受圆弧槽弹力 T 的最大值在最低点取到.

参 考 文 献

[1] 马秀江. 例析“滑块与斜面体”模型的研究方法[J]. 考试周刊，2013(29)：145 - 147.

[2] 陈琪，刘金铭，李卫平. 一道物理奥赛题解法之严谨性探讨[J]. 中学物理，2015，33(21)：82.

[3] 吴好. 用受力分析图分析光滑斜面上滑块下滑问题[J]. 中学物理，2012，30(19)：73 - 74.

[4] 于志明，刘丽丽. 再谈“光滑斜面上滑块下滑问题”的求解方法[J]. 物理通报，2017(7)：9 - 11.

[5] 白荣华，李春梅，高远. “球槽模型”中的临界质量比与静止释放初始位置的关系[J]. 物理通报，2021(9)：72 - 73，76.

[6] 陈向正，李力，张贵华. “球槽模型”的数理解析和一个错误的澄清[J]. 物理教师，2018，39(5)：57 - 58.