

光电门技术在重力加速度测量中的应用*

蓝志强 农佳伟 魏贤浩 李锡林 王建林 丁思治 韦文楼

(广西大学物理科学与工程技术学院 广西 南宁 530004)

(收稿日期:2022-09-08)

摘要:根据简谐振动的特点,构建出一个简易的弹簧振子简谐振动实验装置,利用光电门技术测量弹簧振子做简谐振动的周期,同时结合最小二乘法处理实验数据,计算出重力加速度.研究发现利用该装置测量的重力加速度,结果准确度高,稳定性好,易于推广.

关键词:简谐振动;重力加速度;不确定度;最小二乘法

重力加速度是物理学中的一个重要参量,通常以 g 来表示.重力加速度 g 值随着纬度、海拔高度的不同而不同,因此,地球上不同的地区具有不同的重力加速度 g 值.重力加速度的测量是大学物理实验的一个重要内容.目前,对重力加速度测量的实验方法有单摆法^[1-2],落球法^[3-4],干涉法^[5-6]以及简谐振动法^[7-8]等.单摆法测量重力加速度,由于摆长不易测量,摆幅不易控制,导致测量不准确.采用落球法实验测量重力加速,由于实验过程中落球点不能稳定在同一位置,造成的偶然误差也难以克服.而采用干涉法测量重力加速度,由于设备成本过高,不易在大中专院校以及中小学推广.此外,也有报道利用智能手机结合简谐振动对重力加速进行测试,但由于智能手机的成本较高,且需要安装某一特定的软件,方可进行测试实验,也不利于课堂教学的顺利进行.因此,如何在降低成本的同时,提高加速度的测量精度非常重要.

基于上述原因,本文根据弹簧振子简谐振动的特点,利用光电门技术测量弹簧振子的振动周期,并结合最小二乘法处理实验数据测量重力加速度,其方法简单,成本低,测量结果精确度高.

1 实验原理

将质量为 m_0 的柱形弹簧一端固定于支架上,另一端系上质量为 m 的振子,构成了一个弹簧振子简

谐振动模型.若使弹簧振子在外力作用下离开平衡位置少许,然后释放,弹簧振子将在平衡位置附近做简谐振动,其振动的周期 T 为^[9]

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{m_0}{3}}{\kappa}} \quad (1)$$

式中, κ 为弹簧的劲度系数.在实验过程中,为了提高精度,往往测量弹簧振子振动 n 个周期所用的时间 T' ,则式(1)可变形为

$$T = \frac{T'}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{m_0}{3}}{\kappa}} \quad (2)$$

根据式(2),可得柱形弹簧的劲度系数为

$$\kappa = \left(\frac{2n\pi}{T'}\right)^2 \left(m + \frac{m_0}{3}\right) \quad (3)$$

可见,在 m_0 和 m 一定的条件下,通过测量弹簧振子振动 n 个周期数所用的时间 T' ,即可得出弹簧的劲度系数 κ .

此外,由胡克定律知,在弹性形变的范围内,弹簧的形变量 ΔY 与所受到的拉力 F 成正比,即

$$F = \kappa \Delta Y \quad (4)$$

在实验中,拉力 F 可以通过添加砝码来实现.若弹簧初始位置为 Y_0 ,在拉力 $F = Mg$ 的作用下,其末位位置为 Y ,则式(4)可写成

$$Mg = \kappa(Y - Y_0) \quad (5)$$

* 广西高等教育本科教学改革工程项目,项目编号:2020JGA105;广西自然科学基金,项目编号:2018GXNSFAA294125.

作者简介:蓝志强(1980-),男,博士,高级实验师,研究方向为实验教学、管理与研究.

$$M = \frac{\kappa}{g}Y - \frac{\kappa}{g}Y_0 \quad (6)$$

令

$$a = \frac{\kappa}{g}$$

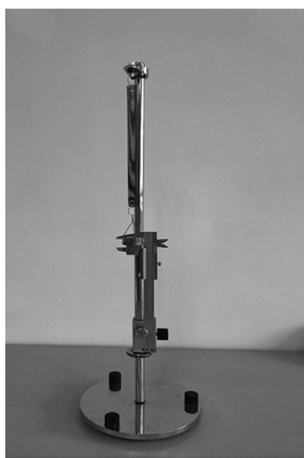
$$b = -\frac{\kappa}{g}Y_0$$

则

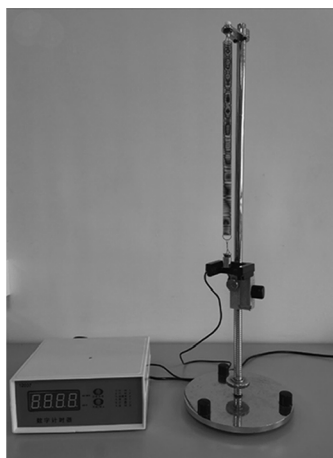
$$M = aY + b \quad (7)$$

通过添加砝码,测量弹簧在砝码质量为 M_i 时所处的位置 Y_i ,即可得出 $M_i - Y_i$ 关系曲线.再用最小二乘法确定曲线的斜率 a ,即可得出重力加速度

$$g = \frac{\kappa}{a} \quad (8)$$



(a) 弹簧伸长量测试装置图



(b) 弹簧振子振动周期测试装置图

图1 重力加速度测量实验装置

2.2 $M - Y$ 数据表

为了测量弹簧的伸长量与所添加砝码质量的关系,表1给出了弹簧形变量与所添加砝码质量之间的关系数据表.添加砝码质量为 M_i 时,记录砝码盘

底端针尖对应的读数 Y_{1i} ,减砝码过程再次记录相应的读数 Y_{2i} ,取

$$Y_i = \frac{Y_{1i} + Y_{2i}}{2}$$

表1 $M - Y$ 数据表

M_i/g	0.000 0	0.999 3	2.001 3	3.003 3	3.989 4	4.990 0	5.990 1	6.991 6	7.990 6	8.999 3	10.000 6
Y_{1i}/mm	5.70	11.14	16.80	22.14	27.72	33.10	38.58	43.86	49.60	54.98	60.44
Y_{2i}/mm	5.62	11.18	16.88	22.39	27.58	33.20	38.58	43.86	49.56	54.96	60.50
Y_i/mm	5.66	11.16	16.84	22.27	27.65	33.15	38.58	43.86	49.58	54.97	60.47

2.3 振动周期的测量

本实验中,在确保在弹簧弹性形变的范围内,我们以弹簧质量 $m_0 = 11.776 2 \times 10^{-3} \text{ kg}$ 、弹簧振子质量 $m = 30.283 2 \times 10^{-3} \text{ kg}$ 构建一个弹簧振子简谐

振动系统,利用光电门技术以及计数器记录弹簧振子做竖直振动70个周期所用的时间 T' ,重复测量8次,所得测量结果列于表2.从测量结果可知,弹簧振子振动70个周期所用时间的最小值和最大值之

间的差值在 0.03 s 以内,说明该装置测量弹簧振子 振动周期稳定性高.

表 2 弹簧振子振动 70 个周期数据记录表

i	1	2	3	4	5	6	7	8
T_i'/s	60.83	60.83	60.83	60.83	60.84	60.82	60.81	60.82

3 讨论分析

根据胡克定律,在弹性形变的范围内,弹簧的伸长量与所受到的拉力成正比,即在弹性形变的范围内,弹簧的伸长量与所受到的拉力呈线性关系,由式(7)以及表 1 可知

$$\epsilon_i = M_i - (aY_i + b) \quad (9)$$

其中 ϵ_i 为偏差, Y_i 为当所添加砝码质量为 M_i 时弹簧的伸长量, a 和 b 为变量,则

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [M_i - (aY_i + b)]^2$$

由最小二乘法原理可知,偏差的平方和最小,分别对变量 a 和 b 求变偏导,得

$$\begin{cases} \frac{\partial \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n Y_i (M_i - aY_i - b) = 0 \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n (M_i - aY_i - b) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

解得

$$\begin{cases} a = \frac{\overline{M} \cdot \overline{Y} - \overline{MY}}{\overline{Y^2} - \overline{Y}^2} \\ b = \overline{M} - a\overline{Y} \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$\overline{M} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

$$\overline{Y^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2$$

以及

$$\overline{MY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i Y_i$$

此外,上式中 a 和 b 的标准差为

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{\sigma_M}{\sqrt{n(\overline{Y^2} - \overline{Y}^2)}} \\ \sigma_b = \frac{\sqrt{\overline{Y^2}} \sigma_M}{\sqrt{n(\overline{Y^2} - \overline{Y}^2)}} \\ \sigma_M = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (M_i - aY_i - b)^2}{n-2}} \end{cases} \quad (12)$$

在上述拟合过程,由最小二乘法原理得拟合的相关系数 R 为

$$R = \frac{\overline{MY} - \overline{M} \cdot \overline{Y}}{\sqrt{(\overline{Y^2} - \overline{Y}^2)(\overline{M^2} - \overline{M}^2)}} \quad (13)$$

Excel 程序提供了计算以上参数的现成函数

$$\begin{cases} a = \text{INDEX}(\text{LINEST}(M_1:M_n, Y_1:Y_n), 1, 1), 1, 1) \\ b = \text{INDEX}(\text{LINEST}(M_1:M_n, Y_1:Y_n), 1, 1), 1, 2) \\ \sigma_a = \text{INDEX}(\text{LINEST}(M_1:M_n, Y_1:Y_n), 1, 1), 2, 1) \\ \sigma_b = \text{INDEX}(\text{LINEST}(M_1:M_n, Y_1:Y_n), 1, 1), 2, 2) \\ \sigma_M = \text{INDEX}(\text{LINEST}(M_1:M_n, Y_1:Y_n), 1, 1), 3, 2) \\ R = \text{INDEX}(\text{LINEST}(M_1:M_n, Y_1:Y_n), 1, 1), 3, 1) \wedge 0.5 \\ \text{自由度 } \nu = \text{INDEX}(\text{LINEST}(M_1:M_n, Y_1:Y_n), 1, 1), 4, 2) \\ \Delta a = t_\nu \cdot \sigma_a \\ \Delta b = t_\nu \cdot \sigma_b \end{cases} \quad (14)$$

式中因子 t_ν 是概率为 95%、自由度为 ν 时的 t 分布因子,可由表 3 查得.

表 3 计算 A 类不确定度的 t 因子表 (置信概率为 95%)

自由度 ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	∞
因子 t_ν 的值	12.7	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	2.23	2.13	2.09	1.96

将表 1 中相关数据代入式(11) ~ (14) 得

$$\begin{cases} a = \bar{a} \pm \Delta a = 0.1827 \pm 0.0006 \text{ kg/m} \\ b = \bar{b} \pm \Delta b = -1.054 \pm 0.022 \text{ g} \\ R = 0.999991 \end{cases} \quad (15)$$

因此上述 $M-Y$ 的关系可绘制如图 2 所示。

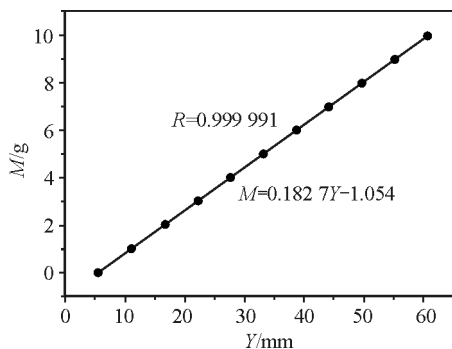


图 2 $M-Y$ 的关系图

由表 2 得

$$\bar{T}' = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 T'_i = 60.83 \text{ s} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Delta T'_A &= \frac{t}{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{1}{8-1} \sum_{i=1}^8 (T'_i - \bar{T}')^2} = \\ &0.84 \times \sqrt{\frac{1}{7} \sum_{i=1}^8 (T'_i - \bar{T}')^2} = 0.01 \text{ s} \end{aligned} \quad (17)$$

根据计时器计时精度,取 $\Delta T'_B = 0.02 \text{ s}$,得

$$\begin{aligned} \Delta T' &= \sqrt{(\Delta T'_A)^2 + (\Delta T'_B)^2} = \\ &\sqrt{0.01^2 + 0.02^2} \text{ s} = 0.03 \text{ s} \end{aligned} \quad (18)$$

则时间 T' 的测量结果为

$$T' = \bar{T}' \pm \Delta T' = (60.83 \pm 0.03) \text{ s} \quad (19)$$

由式(3)可得

$$\begin{aligned} \bar{\kappa} &= \left(\frac{2n\pi}{T'} \right)^2 \left(m + \frac{m_0}{3} \right) = \left(\frac{2 \times 70\pi}{60.83} \right)^2 \cdot \\ &\left(30.2832 + \frac{1}{3} \times 11.7762 \right) \times 10^{-3} \text{ N/m} = \\ &1.788 \text{ N/m} \end{aligned} \quad (20)$$

由

$$\kappa = \left(\frac{2n\pi}{T'} \right)^2 \left(m + \frac{m_0}{3} \right)$$

得

$$\ln \kappa = 2 \ln(2n\pi) - 2 \ln T' + \ln \left(m + \frac{m_0}{3} \right) \quad (21)$$

两边取微分

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa}{\kappa} &= 0 - \frac{2dT'}{T'} + \frac{dm + \frac{dm_0}{3}}{m + \frac{m_0}{3}} = \\ &-\frac{2dT'}{T'} + \frac{dm}{m + \frac{m_0}{3}} + \frac{\frac{dm_0}{3}}{m + \frac{m_0}{3}} \end{aligned} \quad (22)$$

而 κ 的相对不确定度为

$$\begin{aligned} E_\kappa &= \frac{\Delta\kappa}{\kappa} = \\ &\sqrt{\left(\frac{2\Delta T'}{T'} \right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m + \frac{m_0}{3}} \right)^2 + \left(\frac{\frac{\Delta m_0}{3}}{m + \frac{m_0}{3}} \right)^2} \end{aligned} \quad (23)$$

由

$$m = 30.2832 \text{ g}$$

$$m_0 = 11.7762 \text{ g}$$

$$\Delta m = \Delta m_0 = 0.0002 \text{ g}$$

可知

$$\frac{\Delta m}{m} \ll \frac{\Delta T'}{T'}$$

$$\frac{\Delta m_0}{m_0} \ll \frac{\Delta T'}{T'}$$

此时式(23)可写成

$$E_\kappa = \frac{\Delta\kappa}{\kappa} \approx \frac{2\Delta T'}{T'} = \frac{2 \times 0.03}{60.83} = 0.09\% \quad (24)$$

从而 κ 的不确定度为

$$\Delta\kappa = \bar{\kappa} E_\kappa = 1.788 \times 0.09\% \text{ N/m} = 0.002 \text{ N/m} \quad (25)$$

因此,弹簧的劲度系数 κ 为

$$\kappa = \bar{\kappa} \pm \Delta\kappa = (1.788 \pm 0.002) \text{ N/m} \quad (26)$$

将

$$\bar{a} = 0.1827 \text{ kg/m}$$

$$\bar{\kappa} = 1.788 \text{ N/m}$$

代入式(6),得

$$\bar{g} = \frac{\bar{\kappa}}{\bar{a}} = \frac{1.788}{0.1827} \text{ m/s}^2 = 9.787 \text{ m/s}^2 \quad (27)$$

由式(8)可得到 g 的相对不确定度

$$\begin{aligned} E_g &= \frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\kappa}{\bar{\kappa}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} \right)^2} = \\ &\sqrt{(0.09\%)^2 + \left(\frac{0.0006}{0.1827} \right)^2} = \end{aligned}$$

$$0.036 = 0.36\% \quad (28)$$

得 g 的不确定度为

$$\Delta g = \bar{g} \cdot E_g = 9.787 \times 0.36\% \text{ m/s}^2 = 0.036 \text{ m/s}^2 \quad (29)$$

因此,重力加速度的测量结果为

$$g = \bar{g} \pm \Delta g = (9.787 \pm 0.036) \text{ m/s}^2 \quad (30)$$

这与我们所在城市南宁的重力加速度值(9.788

m/s^2) 高度吻合,实验测量值与公认值相对不确定度为 0.01%。说明利用该实验装置测量重力加速度,结果可靠。此外,为了进一步验证本实验的准确性,分别对不同弹簧振子质量 m 、不同振动周期数 n 对应的时间 T'_n 进行测试,测试所得结果列于表 3,并根据表 4 计算得不同参数条件下重力加速度的测量值,如表 5 所示。

表 4 研究弹簧简谐运动实验数据记录表

弹簧振子质量 m/g	测量周期	测量次数							
		1	2	3	4	5	6	7	8
20.144 9	T'_{50}/s	36.49	36.48	36.48	36.48	36.48	36.47	36.49	36.49
	T'_{60}/s	43.77	43.79	43.77	43.77	43.77	43.77	43.77	43.77
	T'_{70}/s	51.07	51.06	51.06	51.06	51.09	51.07	51.07	51.07
	T'_{80}/s	58.36	58.36	58.36	58.36	58.36	58.36	58.36	58.36
30.283 2	T'_{50}/s	43.44	43.44	43.44	43.43	43.43	43.43	43.45	43.45
	T'_{60}/s	52.13	52.15	52.13	52.14	52.14	52.14	52.14	52.13
	T'_{70}/s	60.83	60.83	60.83	60.83	60.84	60.82	60.81	60.82
	T'_{80}/s	69.52	69.52	69.51	69.51	69.5	69.52	69.51	69.53
40.266 5	T'_{50}/s	49.38	49.38	49.37	49.37	49.37	49.37	49.37	49.37
	T'_{60}/s	59.27	59.25	59.25	59.26	59.26	59.25	59.25	59.24
	T'_{70}/s	69.12	69.12	69.12	69.12	69.12	69.12	69.12	69.12
	T'_{80}/s	79.00	79.00	79.00	78.99	78.99	78.99	78.99	78.99
50.387 6	T'_{50}/s	54.78	54.78	54.78	54.79	54.78	54.78	54.78	54.78
	T'_{60}/s	65.74	65.74	65.74	65.74	65.75	65.74	65.74	65.74
	T'_{70}/s	76.69	76.70	76.69	76.70	76.69	76.70	76.70	76.70
	T'_{80}/s	87.60	87.59	87.59	87.59	87.60	87.59	87.60	87.59
55.489 5	T'_{50}/s	57.22	57.22	57.22	57.23	57.21	57.21	57.22	57.22
	T'_{60}/s	68.69	68.69	68.68	68.68	68.69	68.69	68.69	68.69
	T'_{70}/s	80.11	80.13	80.13	80.12	80.1	80.11	80.13	80.1
	T'_{80}/s	91.54	91.53	91.50	91.56	91.53	91.56	91.56	91.53

表 5 不同参数条件下重力加速度的测量值

m/g	20.144 9	30.283 2	40.266 5	50.387 6	55.489 5
测量结果	$g/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$	$g/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$	$g/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$	$g/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$	$g/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$
$n = 50$	9.770 ± 0.036	9.792 ± 0.035	9.792 ± 0.035	9.776 ± 0.034	9.803 ± 0.034
$n = 60$	9.776 ± 0.035	9.787 ± 0.035	9.792 ± 0.034	9.776 ± 0.034	9.797 ± 0.034
$n = 70$	9.770 ± 0.035	9.787 ± 0.035	9.792 ± 0.033	9.776 ± 0.034	9.797 ± 0.034
$n = 80$	9.770 ± 0.035	9.787 ± 0.035	9.797 ± 0.034	9.787 ± 0.033	9.803 ± 0.033

由表5所列测量结果可知,不同弹簧振子质量 m 、不同振动周期 n 下,所得重力加速度的测量结果与本地重力加速度值(9.788 m/s^2)高度吻合,当弹簧振子质量 $m_0=20.144\text{ 9 g}$,振动周期数 n 为50,70,80次时,测量所得重力加速度具有最小值,其结果为 9.770 m/s^2 ,此时相对不确定度为 0.4% ,与公认值相对不确定度为 0.2% ;当弹簧振子质量 $m_0=55.489\text{ 5}$,振动周期数 n 为50和80次时,测量所得重力加速度具有最大值,其结果为 9.803 m/s^2 ,此时相对不确定度为 0.3% ,与公认值相对不确定度为 0.2% ;而当弹簧振子质量 $m_0=30.283\text{ 2 g}$ 时,测量值与公认值相对不确定度为 0.01% .可见,在不同弹簧振子质量、不同的振动周期条件下,只要在弹簧的弹性形变范围内,测量所得的重力加速度具有高度的稳定性,说明该实验装置性能稳定,测量重力加速度结果的可信度高.

4 结论

通过光电门技术测量简谐振子振动周期,并结合最小二乘法处理实验数据测量重力加速度,在弹簧振子质量固定不变的情况下,改变弹簧振子振动周期;或者在弹簧振子振动周期不变的情况下,改变弹簧振子的质量,测量所得的重力加速度值均与当地的重力加速度值高度一致,并且测量精度可达

0.4% ,与公认值相对不确定可达 0.01% .

该设备只要在弹簧弹性形变范围内,弹簧振子的质量以及振子振动周期均可随机选择,大大提高了实验的机动性.同时该装置原理简单,通俗易懂,操作方便,成本低,且易于推广,可以充当大中专院校教学仪器.

参考文献

- [1] 黄膺达,王旗.基于图像处理的单摆测量重力加速度实验的研究[J].大学物理实验,2020,33(5):11-14.
- [2] 柏浩年,贺叶露,段昌宝.基于磁力限制摆物运动的单摆测量重力加速度[J].物理实验,2019,39(11):59-61.
- [3] 俞晓明,崔益和,陈飞,等.恢复系数及重力加速度的落球弹跳法测量[J].大学物理,2010,29(11):35-36,58.
- [4] 朱道云,庞玮,吴肖,等.多管落球法测量重力加速度[J].实验技术与管理,2012,29(4):59-61.
- [5] 胡梦楠,李红蕙,白在桥.干涉法测量重力加速度[J].大学物理,2018,37(7):73-77.
- [6] 章欢开,颜树华,朱凌晓,等.冷原子干涉绝对重力精密测量与系统误差[J].仪器仪表学报,2020,41(8):1-12.
- [7] 苗红梅,杨智敏.利用智能手机居家测量声速和重力加速度[J].大学物理,2021,40(1):27-32.
- [8] 林奕晖,李德安.利用智能手机测量弹簧劲度系数与重力加速度[J].物理实验,2020,40(3):55-59.
- [9] 吴伟明,大学物理实验[M].北京:科学出版社,2009:207-209.

Application on Photoelectric Gate Technology in Gravitational Acceleration Measurement

LAN Zhiqiang NONG Jiawei WEI Xianhao LI Xilin

WANG Jianlin DING Sizhi WEI Wenlou

(School of Physical Science and Technology, Guangxi University, Nanning, Guangxi 530004)

Abstract: According to the characteristics of simple harmonic vibration, a simple experimental device for simple harmonic vibration of spring oscillator was fabricated. The vibration periods of spring vibrator were recorded using photoelectric gate technology. The least square method was employed to process the experimental data. Studied result shows that the acceleration of gravity measured by this device has high accuracy, good stability and easy to be popularized.

Key words: simple harmonic vibration; gravity acceleration; uncertainty; least square method