对一道全反射问题的深入探析

何天龙
（杭州第二中学钱江学校　浙江 杭州　311200）

（收稿日期：2022－09－08）

摘　要：全反射是习题教学中的一个难点，学生一听就懂，一做就错，对于这类题中所涉及的模型没有一个全面的理解，普通的习题考查的是模型的一部分，如果在教学中能够全面深入地剖析整个模型，不仅可以加深学生对知识的理解，还能很大程度地激发学生学习物理的兴趣，发展学生的物理思维，对于学生的探究意识和能力的培养也是大有裨益.

关键词：全反射；半圆形玻璃容器；建模；科学探究

1　原题再现

在人教版选择性必修一光学这一章里，学生在练习时常常会遇到这样的一个题目：

【原题】 如图1所示，截面为半圆形的透明容器半径为 R（容器壁厚度不计），$\overline{AB}$ 为直径，O 为圆心，C 点为圆弧的最低点，P 点与 O 点的距离为 $\frac{\sqrt{3}R}{3}$，容器里装满折射率 $n=2$ 的介质，在光源 S 从 C 点沿半径运动到 O 点的过程中，下列说法正确的是（　　）

A. S 运动到 P 点时，$\overset{\frown}{ACB}$ 上有光射出区域的长度为 $\frac{\pi R}{3}$

B. S 运动到 P 点时，直径 $\overline{AB}$ 上有光射出区域的长度为 $\frac{R}{3}$

C. S 运动 $\frac{R}{2}$ 的距离后，$\overset{\frown}{ACB}$ 上所有区域均有光射出

D. S 运动 $\frac{R}{2}$ 的距离后，直径 $\overline{AB}$ 上所有区域均有光射出

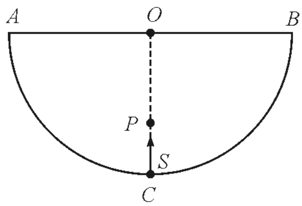

图1　光在玻璃容器里发生折射

2　解答过程

2.1　直径 $\overline{AB}$ 上有光射出区域

已知折射率 $n=2$，根据公式：$\sin\varphi=\frac{1}{n}$，发生全反射的临界角 $\varphi=30°$，如图2所示，在 Rt△OPD 中，$\overline{OD}=\overline{OP}\tan 30°$，当光线向两边移动时，在玻璃中的入射角变大，更容易发生全发射. 故当 $\overline{OP}=\frac{\sqrt{3}}{3}R$ 时，$\overline{AB}$ 上有光线射出的长度为 $\frac{2}{3}R$，同理当 $\overline{OP}=\frac{1}{2}R$ 时，有光线射出的长度为 $\frac{\sqrt{3}}{3}R$.

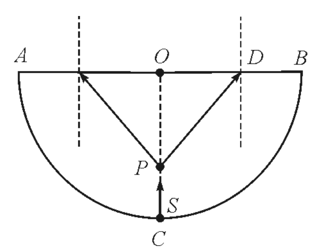

图2　光在半径上发生折射

2.2　$\overset{\frown}{ABC}$ 上有光射出区域

下面讨论当入射光线射到圆弧上的两种情形.

情形一：

如图3所示，当 S 运动 $\frac{1}{2}R$ 时，$\overline{OP}=\frac{1}{2}R$ 时，$\alpha=30°$，刚好在 D 点发生全发射，光线射在 $\overset{\frown}{DC}$ 和 $\overset{\frown}{DB}$ 的过程中，入射角均变小，现证明如下：

在 △OPE 中，记 ∠OPE 为 γ，由正弦定理可知

$$\frac{\sin\beta}{\frac{1}{2}R}=\frac{\sin\gamma}{R}\qquad \sin\beta=\frac{1}{2}\sin\gamma$$

当 γ 从 90° 减小，β 将由 30° 开始减小，不再发生全发射，$\overset{\frown}{BD}$ 被照亮. 根据对称性，$\overset{\frown}{ACB}$ 上除了 D 和 D' 两点外，其他区域有光线射出.

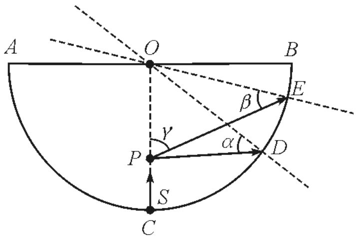

图 3　光在圆弧上发生折射

情形二：

$\overline{OP}=\frac{\sqrt{3}}{3}R$，如图 4 所示，在 $\triangle OPD$ 中，入射角 $\angle PDO$ 记为 α，当 $\alpha=30^\circ$ 时，根据余弦定理

$$\cos\alpha=\frac{R^2+\overline{PD}^2-\overline{OP}^2}{2R\overline{PD}}$$

代入数据可解得

$$\overline{PD}=\frac{\sqrt{3}}{3}R \text{ 或 } \frac{2\sqrt{3}}{3}R$$

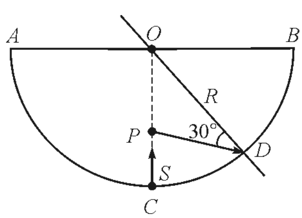

图 4　发生全反射时光线在弧上位置

讨论 1：如图 5 所示，当 $\overline{PD}=\frac{\sqrt{3}}{3}R$，$\alpha=30^\circ$，$\gamma=120^\circ$，入射光线由 D 点向 B 点移动过程中，由正弦定理可得 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\gamma$，当 $90^\circ\leqslant\gamma\leqslant120^\circ$，$\alpha\geqslant30^\circ$，在 $\overset{\frown}{DD'}$ 发生全发射；当 $60^\circ\leqslant\gamma\leqslant90^\circ$，$\alpha\geqslant30^\circ$，在 $\overset{\frown}{D'B}$ 发生全发射，光线射到 B 点时，刚好发生全发射，根据对称性，在 $\overset{\frown}{ACB}$ 上有光线射出的弧长为 $\frac{2\pi R}{3}$.

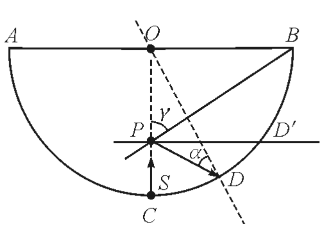

图 5　弧上有光线射出的长度

讨论 2：当 $\overline{PD}=\frac{2\sqrt{3}R}{3}$ 时，在 A、B 两点恰好发生全发射，$\overset{\frown}{AB}$ 上只有 A、B 两点被照亮.

做完这道题目后留下两个疑问：(1) 点有没有长度；(2) 如果光源 S 在 $\overline{OC}$ 之间的任意位置时，被照亮区域长度与光源的位置有什么定量关系，带着这两个问题进行了探究.

2.3　问题探究

问题 1：点有没有长度.

请教了学校的数学老师，翻阅了文献，其中对点的解释为：点是没有任何几何尺寸的，积分求解曲线长度的过程中也不涉及单个的点，因为不论你分割的多细多密，每一个微元仍然是一个小线段. 长度的概念离不开连续性与领域，和单个的点无关. 因此在情形一中，可认为 $\overset{\frown}{ACB}$ 所有区域均有光线射出.

问题 2：光线射到直径上还是圆弧上.

(1) 如图 6 所示，当 $\overline{OP}=x(0\leqslant x\leqslant R)$，光线射到 $\overline{AB}$ 边上，D 点两边移动时，α 变大，$\overline{OD}$ 边上的光线均能射出，有光线射出的长度为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}x$.

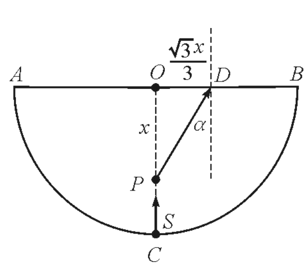

图 6　直径上有光线射出的长度

(2) 当 $\overline{OP}=x(0\leqslant x\leqslant R)$，光线射到 $\overset{\frown}{ACB}$ 上，如图 4，在 $\triangle OPD$ 中，由余弦定理

$$x^2=R^2+y^2-2Ry\cos 30^\circ$$

解得

$$y^2-\sqrt{3}Ry+R^2-x^2=0$$

讨论 1：$\Delta<0$ 时，$x<\frac{1}{2}R$，$\overset{\frown}{ACB}$ 上均有光线射出.

讨论 2：$\Delta=0$ 时，$x=\frac{1}{2}R$，$\overset{\frown}{ACB}$ 上均有光线射出(即情形一).

讨论 3：$\Delta>0$ 时，$x>\frac{1}{2}R$，解得

$$y_1=\frac{\sqrt{3}R+\sqrt{4x^2-R^2}}{2}$$

$$y_2=\frac{\sqrt{3}R-\sqrt{4x^2-R^2}}{2}$$

如图 7 所示. 进一步讨论

$$d=\sqrt{R^2-x^2}$$

$$d < y_1 < \sqrt{R^2 + x^2}$$

$$R - x < y_2 < \sqrt{R^2 - x^2}$$

且可解得　　$\frac{1}{2}R < x < \frac{\sqrt{3}R}{3}$

如图 7 所示，此时入射光线为 PD，在 D 点发生全发射，$\sin\angle PDO = \frac{1}{n}$，代入可得，$\angle PDO = 30°$，在 $\triangle OPD$ 中，$\angle POD$ 记为 α，则 $\angle OPD = (150° - \alpha)$，由正弦定理可得

$$\frac{\sin\angle PDO}{x} = \frac{\sin\angle OPD}{R}$$

解得　　$\alpha = 150° - \arcsin\frac{R}{2x}$

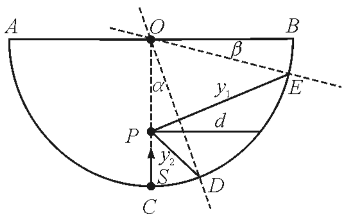

图 7　光源向 O 点移动，弧上光线射出的长度

记 $\angle BOE$ 为 β，入射光线为 PE 时，刚好发生全发射，临界角为

$$\angle PEO = 30° \quad \angle POE = 90° - \beta \quad \angle OPE = 60° + \beta$$

在 ΔOPE 中，由正弦定理可得

$$\frac{\sin\angle PEO}{x} = \frac{\sin\angle OPE}{R}$$

解得　　$\beta = 60° - \arcsin\frac{R}{2x}$

在 $\overline{DE}$ 区域发生全反射（证明过程见情形二中的讨论 1），有光线射出的弧为 $\overset{\frown}{CD}$ 和 $\overset{\frown}{BE}$，对应的圆心角大小为 $210° - 2\arcsin\frac{R}{2x}$，此圆心角所对应的弧长大小为

$$\frac{210° - 2\arcsin\frac{R}{2x}}{180°}\pi R$$

在整个半圆弧上由对称性可知，在 $\overset{\frown}{ACB}$ 上光线射出的弧长为

$$d = \sqrt{R^2 - x^2}$$

解得　　$x = \frac{\sqrt{3}}{3}R$

在 $\overset{\frown}{ACB}$ 上有光线射出的弧长为 $\frac{2\pi R}{3}$（即情形二中的讨论 1）.

当 $y_2 > d$，如图 8 所示，解得 $\frac{\sqrt{3}R}{3} < x < R$，此时 $y_1 > \sqrt{x^2 + R^2}$，全发射临界角为 $\angle PDO = 30°$，记 $\angle BOD$ 为 β. 在 ΔOPD 中，由正弦定理可得

$$\beta = 60° - \arcsin\frac{R}{2x}$$

在 $\overset{\frown}{DB}$ 上有光线射出，有光线射出的弧长为

$$\frac{60° - 2\arcsin\frac{R}{2x}}{180°}\pi R$$

由对称性可知，在 $\overset{\frown}{ACB}$ 上光线射出的弧长为

$$\frac{60° - \arcsin\frac{R}{2x}}{90°}\pi R$$

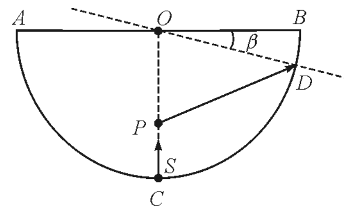

图 8　光源继续靠近 O 点，圆弧上射出光线长度

综上即是该题的详细分析过程，不难看出选项中的 $\frac{1}{2}R$ 对应特殊情况 $\Delta = 0$，$\frac{\sqrt{3}}{3}R$ 对应 $y_2 = d$ 这种特殊情况，是命题者精心设计的两个特解.

3　结束语

经过以上的分析和解构，全发射模型涉及的物理知识、方法一目了然，学生不仅弄透了全发射，也在解题中体会到了物理学习的乐趣，激发了探究的欲望. 当我们在课堂教学中有意识地去建立一些模型，彻底解构这个模型，再反过来去看出题者的意图，会有一种"豁然开朗"的心情和"一览众山小"的感觉.

新课标强调在教学中培养学生的科学建模能力和探究意识. 建模和探究可以来源于日常真实的生活情境，也可以是学生在解题过程中遇到的一些典型问题. 当我们有意识地去挖掘、解构一些典型的问题时，将这类模型弄懂搞透，在这个过程中学生的建模能力和探究能力就得到了良好的训练.

参 考 文 献

[1] 吴春晓，黄致新. 基于模型构建的科学思维培养 —— 以"全反射"为例[J]. 物理教学探讨，2021，39(11)：26 - 27，31.

[2] 袁振卓. 光在"玻璃体"中折射问题归类分析[J]. 中学物理教学参考，2008(7)：29 - 31.

[3] 中华人民共和国教育部. 普通高中物理课程标准(2017 年版)[S]. 北京：人民教育出版社，2018.