

## 例析图解法在多力多体问题中的应用

朱启明 王 瑶 李康丽

(汉川市第一高级中学 湖北 孝感 431600)

(收稿日期:2022-09-11)

**摘要:**多力、多体问题是比较典型的一类问题,也是高考中比较喜欢考查的问题.以3道高考题对多力多体问题分类,先用解析法做出详解,再用图解法快速精准解决难点,两种方法对比,以期帮助学生提高思维能力,促进学科核心素养的养成.

**关键词:**多力问题;多体问题;图解法;矢量三角形;矢量多边形

本文以2022年出现的3道力学高考题为样本,用两种方法对比解题<sup>[1]</sup>,让读者从中感受合理运用“数形结合”方法将力学分析化繁为简的解题魅力.

### 1 巧构嵌套矢量三角形

**【例1】**(2022年高考物理海南卷第8题)我国的石桥世界闻名,如图1所示,某桥由6块形状完全相同的石块组成,其中石块1、6固定,2、5质量相同为 $m$ ,3、4质量相同为 $m'$ ,不计石块间的摩擦,则 $m:m'$ 为( )

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$     B.  $\sqrt{3}$     C. 1    D. 2

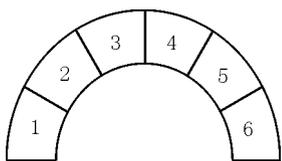


图1 例1题图

**参考答案:**D.

**命题意图:**本题考查多体平衡及其相关知识.

**解析法:**6块形状完全相同的石块围成半圆环,对应的圆心角为 $180^\circ$ ,每块石块对应的圆心角为 $30^\circ$ .对第3块石块受力分析如图2所示,正交分解石块2对石块3的弹力 $F_{N23}$ .

$$F_{N23} \cos 60^\circ = m'g \quad F_{N23} \sin 60^\circ = F_{N43}$$

对第2块和第3块两块石块整体受力分析如图3所示.

$$F_{N12} \cos 30^\circ = (m + m')g$$

$$F_{N12} \sin 30^\circ = F_{N43}$$

联立可解得

$$\frac{m}{m'} = 2$$

故选项D正确.

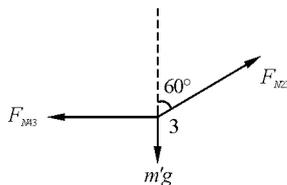


图2 第3块石块受力图

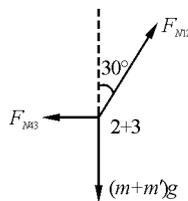


图3 第2和3两块石块受力图

**图解法:**如图4所示,图像成嵌套组合结构,矢量三角形OAB对应石块3,矢量三角形ABC对应石块2,矢量三角形OAC对应石块2+3整体.

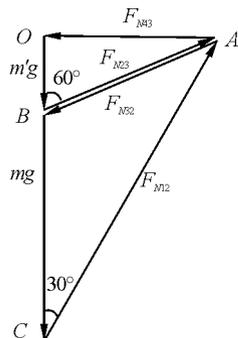


图4 嵌套组合矢量图

由图4可得

$$\tan 30^\circ = \frac{F_{N43}}{(m+m')g}$$

和  
可得

$$\tan 60^\circ = \frac{F_{N43}}{m'g}$$

$$\frac{m}{m'} = 2$$

故选项D正确。

**点评:**本题取材于中国古代桥梁建筑,并在其基础上做了合理的简化,6个物体叠放平衡,看似复杂实则简单.解析法是我们经常采用的办法,先分析单个物体(第3块石块),再分析第2和第3两块石块整体,通过正交分解法列出两个方向上受力平衡的等式,最后通过联立方程、大量计算得出结果.本例题图解法采用嵌套组合结构,将多个力的矢量三角形整合到同一几何图形中,直观地获取等式关系,可以做到轻松求解.

## 2 构建动态圆矢量三角形

**【例2】**(2022年高考物理河北卷第7题)如图5所示,用两根等长的细绳将一匀质圆柱体悬挂在竖直木板的P点,将木板以底边MN为轴向后缓慢转动直至水平,绳与木板之间的夹角保持不变,忽略圆柱体与木板之间的摩擦,在转动过程中( )

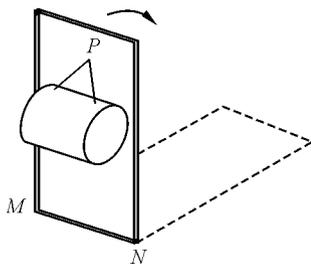


图5 例2题图

- A. 圆柱体对木板的压力逐渐增大
- B. 圆柱体对木板的压力先增大后减小
- C. 两根细绳上的拉力均先增大后减小
- D. 两根细绳对圆柱体拉力的合力保持不变

**参考答案:**B.

**命题意图:**本题考查物体动态平衡和力的合成与分解及其相关知识。

**解析法:**设两绳子对圆柱体拉力的合力为 $F_P$ ,木板对圆柱体的支持力为 $F_N$ , $F_P$ 和 $F_N$ 两力的夹角

为 $(\pi - \alpha)$ ,从右向左看圆柱体受力如图6所示,在矢量三角形中,根据正弦定理可得

$$\frac{mg}{\sin \alpha} = \frac{F_N}{\sin \beta} = \frac{F_P}{\sin \gamma} \quad (1)$$

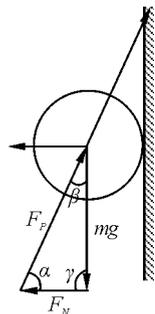


图6 圆柱体受力图

在木板以直线MN为轴向后缓慢转动直至水平过程中, $\alpha$ 不变且 $\alpha < 90^\circ$ , $\gamma$ 从 $90^\circ$ 逐渐减小到零,又 $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ,可得

$$90^\circ \leq \alpha + \beta \leq 180^\circ$$

则 $0 < \beta < 180^\circ$ ,可知 $\beta$ 从锐角逐渐增大到钝角。

根据式(1),由于 $\sin \gamma$ 不断减小,可知 $F_P$ 不断减小, $\sin \beta$ 先增大后减小,可知 $F_N$ 先增大后减小,结合牛顿第三定律可知,圆柱体对木板的压力先增大后减小,设两绳子之间的夹角为 $2\theta$ ,绳子拉力为 $F_T$ ,则

$$2F_T \cos \theta = F_P$$

$\theta$ 不变, $F_P$ 逐渐减小,可知绳子拉力 $F_T$ 不断减小,故选项B正确,A、C、D错误。

**图解法:**如图7所示,设两绳子对圆柱体拉力的合力为 $F_P$ ,木板对圆柱体的支持力为 $F_N$ ,两力 $F_P$ 和 $F_N$ 方向一直变化,但两力的夹角 $(\pi - \alpha)$ 不变,可以根据定弦的圆周角不变原理,以恒力 $mg$ 为圆的一条定弦,作出不同状态的多个矢量三角形,可以非常直观地看出 $F_P$ 由最大值开始逐渐减小, $F_N$ 先增大到最大(直径表示的 $F_N$ 最大)后逐渐减小.结合牛顿第三定律和力的分解知识可知选项B正确,A、C、D错误。

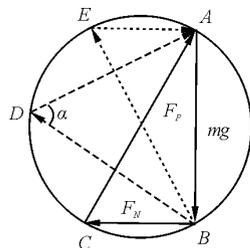


图7 动态矢量三角形图

**点评:**本题为四力共点动态平衡问题,难度系数较大.解析法先是将两个对称弹力合成,转化成为三力问题,再应用正弦定理、角度范围讨论、力的合成与分解等相关知识解题.图解法先是将两个对称弹力合成为 $F_P$ ,再依据一力 $mg$ 恒定,另外两力 $F_P$ 和 $F_N$ 方向一直变化,但两力的夹角( $\pi - \alpha$ )不变,作出动态圆,恒力为动态圆的一条弦,根据不同位置可以直观地判断各力的大小变化.

### 3 构建动态圆矢量多边形

**【例3】**(2022年高考湖北物理卷第11题)如图8所示,两平行导轨在同一水平面内.一导体棒垂直放在导轨上,棒与导轨间的动摩擦因数恒定.整个装置置于匀强磁场中,磁感应强度大小恒定,方向与金属棒垂直、与水平向右方向的夹角 $\theta$ 可调.导体棒沿导轨向右运动,现给导体棒通以图示方向的恒定电流,适当调整磁场方向,可以使导体棒沿导轨做匀加速运动或匀减速运动.已知导体棒加速时,加速度的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}g$ ;减速时,加速度的最大值为 $\sqrt{3}g$ ,其中 $g$ 为重力加速度大小.下列说法正确的是( )

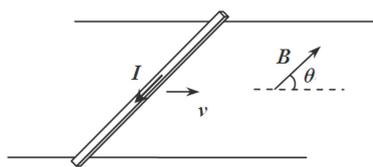


图8 例3题图

- A. 棒与导轨间的动摩擦因数为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$   
 B. 棒与导轨间的动摩擦因数为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$   
 C. 加速阶段加速度大小最大时,磁场方向斜向下, $\theta = 60^\circ$   
 D. 减速阶段加速度大小最大时,磁场方向斜向上, $\theta = 150^\circ$

**参考答案:**B、C.

**命题意图:**本题考查安培力、摩擦力、牛顿运动定律及其相关知识点.

**解析法:**设磁场方向与水平方向夹角为 $\theta_1$ , $\theta_1 < 90^\circ$ ;当导体棒加速且加速度 $a_1$ 最大时,合力向右最大,根据左手定则和受力分析可知安培力应该斜向右上方,磁场方向斜向右下方,如图9所示.

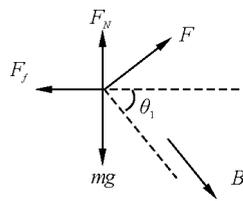


图9 导体棒受力图1

此时有

$$F_N + F \cos \theta_1 = mg$$

$$F \sin \theta_1 - \mu F_N = ma_1$$

令

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

根据数学知识可得

$$F \sqrt{1 + \mu^2} \sin(\theta_1 + \alpha) = ma_1 + \mu mg$$

则有

$$\sin(\theta_1 + \alpha) = \frac{ma_1 + \mu mg}{F \sqrt{1 + \mu^2}} \leq 1$$

同理磁场方向与水平方向夹角为 $\theta_2$ , $\theta_2 < 90^\circ$ ,当导体棒减速,且加速度 $a_2$ 最大时,合力向左最大,根据左手定则和受力分析可知安培力应该斜向左下方,磁场方向斜向左上方,如图10所示.

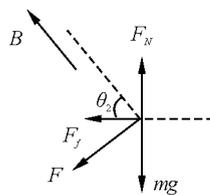


图10 导体棒受力图2

此时有

$$F_N = mg + F \cos \theta_2$$

$$F \sin \theta_2 + \mu F_N = ma_2$$

则

$$F \sqrt{1 + \mu^2} \sin(\theta_2 + \alpha) = ma_2 - \mu mg$$

所以有

$$\sin(\theta_2 + \alpha) = \frac{ma_2 - \mu mg}{F \sqrt{1 + \mu^2}} \leq 1$$

当匀加速运动或匀减速运动加速度分别最大时,不等式均取等号,联立可得

$$\mu = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

代入

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

可得  $\alpha = 30^\circ$ , 此时  $\theta_1 = \theta_2 = 60^\circ$ ; 加速阶段加速度大小最大时, 磁场方向斜向右下方, 有  $\theta = \theta_1 = 60^\circ$ ; 减速阶段加速度大小最大时, 磁场方向斜向左上方, 有

$$\theta = 180^\circ - \theta_2 = 120^\circ$$

故选项 B、C 正确, A、D 错误.

**图解法:** 优先把支持力  $F_N$  和滑动摩擦力  $F_f$  合成为  $F_\mu$ , 如图 11 所示,  $F_\mu$  与  $F_N$  之间的夹角为  $\varphi$ , 可得

$$\tan \varphi = \frac{F_f}{F_N} = \mu$$

以定圆表示安培力 ( $F_{安} \leq mg$ ) 画出矢量多边形<sup>[1-2]</sup>, 保证合外力水平方向且有向右(图 12)和向左(图 13)的极值情况<sup>[3]</sup>.

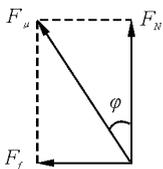


图 11  $F_N$  与  $F_f$  合成图

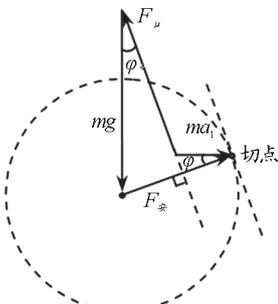


图 12 合外力向右极值图

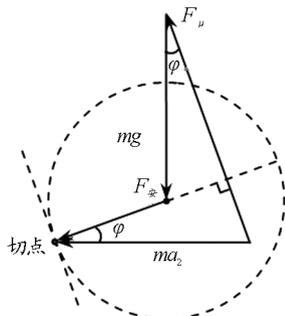


图 13 合外力向左极值图

已知

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}g}{3} \quad a_2 = \sqrt{3}g \quad (2)$$

$$\tan \varphi = \frac{F_f}{F_N} = \mu \quad (3)$$

根据

$$ma_1 \cos \varphi + mg \sin \varphi = F_{安} \quad (4)$$

$$ma_2 \cos \varphi - mg \sin \varphi = F_{安} \quad (5)$$

联立式(2) ~ (5) 可得

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{即} \quad \varphi = 30^\circ \quad \mu = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

根据左手定则可得: 导体棒加速且加速度最大时, 磁场方向斜向右下方, 有  $\theta = 60^\circ$ , 导体棒减速且加速度最大时, 磁场方向斜向左上方, 有  $\theta = 120^\circ$ , 故选项 B、C 正确, A、D 错误.

**点评:** 本题为四力共点动态不平衡问题, 不少学生被困在此题上. 解析法采用了三角函数辅助角, 对于数学基础不扎实的学生, 并不能熟练使用这个方法, 往往是耗时费力最终可能还会半途而废. 图解法先是将支持力和滑动摩擦力合成为  $F_\mu$ , 转化成为三力不平衡问题<sup>[4]</sup>. 再巧妙地以定圆表示安培力, 左右两边画出切线, 快速精准找到题目描述的两种极值情况, 做到化繁为简, 轻松突破难点, 避免了复杂的数学三角函数运算, 两种方法也可互为检验.

#### 4 结束语

通过解析法和图解法两种方法的对比, 我们不难发现, 合理使用矢量三角形或者矢量多边形, 可以化繁为简, 以“形”直观地显示各物理量间的平衡关系或极值条件, “快”“准”“狠”地突破难点. 教学实践表明, 优秀的学生能灵活运用高中物理学到的知识并结合题目特点使用“数形结合”的方法, 降低问题的理解难度, 提升物理科学探究能力和科学思维. 教师在日常教学中要渗透这种解题思想, 培养学生巧用图像的意识, 提升思维层次, 促进学科核心素养的养成.

#### 参考文献

- [1] 何勇, 任致远. 利用圆的性质解决力学中动态平衡问题[J]. 物理教师, 2021(4): 91-93.
- [2] 祁宜纯. 用作图法巧解动态平衡问题[J]. 物理通报, 2022(5): 102-105.
- [3] 张敏, 吴春晓. 巧用摩擦角作图解决动力学极值问题[J]. 物理通报, 2019(S1): 63-65.
- [4] 郭威. “另类”求解四力的静态、动态平衡问题[J]. 教学考试, 2020(49): 77-80.