



线圈在无限长载流直导线磁场中的逃逸速度研究

贾平

(苏州科技城外国语高级中学 江苏 苏州 215000)

(收稿日期:2022-09-14)

摘要:分析矩形、圆形线圈在无限长载流直导线磁场中的运动,求解线圈运动的感应电流和安培力,建立运动学微分方程,得到线圈在无限长载流直导线磁场中存在逃逸速度.线圈能从磁场中逃逸的最小初速度与线圈尺寸、电阻、初始位置、长直导线电流均有关,该模型为教师教学提供理论分析.

关键词:逃逸速度;无限长载流直导线;线圈

1 引言

逃逸速度一般用来描述飞船摆脱引力场束缚所需的最低速率,在电磁场问题中也存在“逃逸速度”的场景.

【题目】如图1所示,一无限长通电直导线固定在光滑水平面上,一质量为 0.02 kg 的金属圆环在该平面内以大小 $v_0 = 2\text{ m/s}$ 、方向与电流方向成 60° 角的初速度滑出,直到达到稳定.求:

- (1) 整个过程金属圆环产生的电能;
- (2) 整个过程金属圆环受到安培力的冲量.

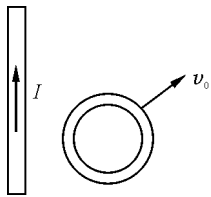


图1 题图

解析: (1) 金属圆环以初速度 v_0 运动后,穿过它的磁通量发生变化,圆环中会产生顺时针方向的感应电流,圆环受到的安培力方向与通电直导线电流方向垂直.安培力使金属圆环在垂直电流方向做减速运动直到速度为零,在平行电流方向不受力做匀速运动.金属圆环的末速度大小为

$$v = v_0 \cos 60^\circ = 1\text{ m/s}$$

整个过程中金属圆环中产生的电能为

$$E_{\text{电}} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2$$

即

$$E_{\text{电}} = 0.03\text{ J}$$

(2) 以垂直电流方向向右为正,在垂直电流方向由动量定理

$$I = mv_t - mv_0 \sin 60^\circ$$

可得

$$I = 0 - mv_0 \sin 60^\circ = -0.02\sqrt{3}\text{ N}\cdot\text{s}$$

安培力的冲量大小为 $0.02\sqrt{3}\text{ N}\cdot\text{s}$,方向向左.

本文题源来自2015年高考上海物理卷第24题,2022届苏锡常镇物理一模卷第13题引用了该题.笔者提出质疑:官方给的答案是否有欠考虑之处?命题是否有漏洞?该模型下,垂直长直导线方向上的分速度最终一定会变为零吗?笔者尝试用理论解释来回答上述质疑.

借助本题,本文考虑矩形和圆形线圈在无限长载流直导线磁场中的运动情况^[1-2].方便起见,假定无限长载流直导线中的电流为 I_0 ,距长直导线 x 处产生的磁感应强度 $B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi x}$,线圈运动的方向垂直于长直导线且与其在同一平面,线圈电阻为 R ,以向右为 x 轴正方向,忽略线圈中的感应电流对无限长直导线内电流的影响.

2 矩形线圈在无限长载流直导线磁场中的运动

如图2所示,假定矩形线圈 $ABCD$ 的长、宽分别为 l_1 、 l_2 , AD 边距离长直导线的初始距离为 x_0 ,线圈

初始速度为 v_0 .

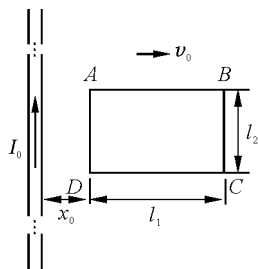


图2 矩形线圈在无限长载流导线磁场中的运动

当线圈左侧距离导线为 x , 运动速度为 v , AD 和 BC 边切割磁感线产生的感应电动势分别为 E_{AD} 和 E_{BC} , 有

$$\begin{aligned} E_{AD} &= B_{AD} l_2 v = \frac{\mu_0 I_0 l_2 v}{2\pi x} \\ E_{BC} &= B_{BC} l_2 v = \frac{\mu_0 I_0 l_2 v}{2\pi(x+l_1)} \end{aligned} \quad (1)$$

有 $E_{AD} > E_{BC}$, 则回路中产生的感应电流为顺时针方向, 大小为

$$\begin{aligned} I &= \frac{E_{AD} - E_{BC}}{R} = \\ &= \frac{\mu_0 I_0 l_1 l_2 v}{2\pi R} \frac{1}{x(x+l_1)} \end{aligned} \quad (2)$$

AD 和 BC 边受到的安培力为 F_{AD} 和 F_{BC} , 根据左手定则, F_{AD} 向左, F_{BC} 向右, 则有

$$\begin{aligned} F_{AD} &= B_{AD} I l_2 = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi x} \frac{\mu_0 I_0 l_1 l_2 v}{2\pi R x (x+l_1)} l_2 \\ F_{BC} &= B_{BC} I l_2 = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi(x+l_1)} \frac{\mu_0 I_0 l_1 l_2 v}{2\pi R x (x+l_1)} l_2 \end{aligned} \quad (3)$$

此时物体所受的合外力为

$$\begin{aligned} \sum F &= -F_{AD} + F_{BC} = \\ &= -\frac{\mu_0^2 I_0^2 l_1^2 l_2^2 v}{4\pi^2 R x^2 (x+l_1)^2} \end{aligned} \quad (4)$$

合外力方向与运动方向相反, 线圈减速. 当线圈与长直导线距离增加, 载流长直导线产生的磁场在减弱, 线圈所受合外力减小, 线圈做加速度减小的减速运动.

根据牛顿第二定律写出线圈运动的微分方程

$$\frac{dv}{dt} = -\xi \frac{v}{x^2 (x+l_1)^2} \quad (5)$$

其中

$$\xi = \frac{\mu_0^2 I_0^2 l_1^2 l_2^2}{4\pi^2 m R}$$

式(5)中含有 x, v, t , 因此做微分变换

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \quad (6)$$

代入式(5)有

$$v \frac{dv}{dx} = -\xi \frac{v}{x^2 (x+l_1)^2} \quad (7)$$

将式(7)分离变量得

$$dv = -\frac{\xi}{x^2 (x+l_1)^2} dx \quad (8)$$

对式(8)积分可得

$$v \Big|_{v_0}^v = \xi \left[\frac{1}{l_1^2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+l_1} \right) - \frac{2}{l_1^3} \ln \frac{x+l_1}{x} \right] \Big|_{x_0}^x \quad (9)$$

整理可得

$$\begin{aligned} v &= v_0 + \xi \left\{ \left[\frac{1}{l_1^2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+l_1} \right) - \frac{2}{l_1^3} \ln \frac{x+l_1}{x} \right] - \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{1}{l_1^2} \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0+l_1} \right) - \frac{2}{l_1^3} \ln \frac{x_0+l_1}{x_0} \right] \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

设定参数 $R=1 \Omega, l_1=0.5 \text{ m}, l_2=0.2 \text{ m}, m=0.1 \text{ kg}, x_0=0.1 \text{ m}$, 绘制线圈运动的 $v-x$ 图像, 如图3所示.

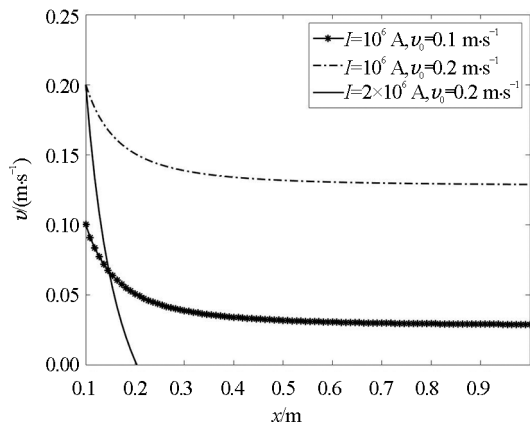


图3 矩形线圈的 $v-x$ 图像

从图3可以发现:

(1) 当线圈的初速度相同时, 长直导线的电流越大, 线圈运动速度减小越快, 有可能减小为零, 此时线圈无法从磁场中逃逸;

(2) 当长直导线的电流相同且线圈能从磁场中逃逸, 随着距离增加, 线圈速度逐渐减小并趋于定值.

考虑线圈恰好能从磁场逃逸的初速度, 即满足 $x \rightarrow +\infty$ 有 $v \rightarrow 0$, 代入式(10), 线圈逃逸最小初速度 v_{\min}

$$v_{\min} = \xi \left[\frac{1}{l_1^2} \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0+l_1} \right) - \frac{2}{l_1^3} \ln \frac{x_0+l_1}{x_0} \right] \quad (11)$$

与 l_1, l_2, R, m, I_0, x_0 均有关, 绘制逃逸最小初速度 v_{\min} 与 I_0 的图像, 如图4所示.

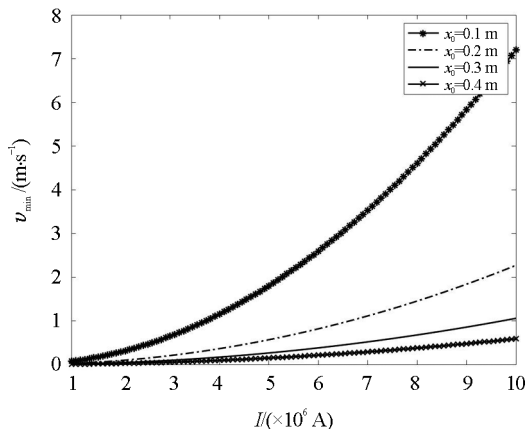


图4 逃逸最小初速度与长直导线电流图像

从图4发现,当长直导线电流增加,线圈从磁场逃逸的最小初速度也逐渐增加.当通电电流恒定,距离长直导线越远,线圈能够逃逸所需要的最小初速度越小.

3 圆形线圈在无限长载流直导线磁场中的运动

考虑圆形线圈的运动,圆形线圈的半径为 a ,方便起见假设圆心所处位置 $x = (n+1)a$,其中 $n \in \mathbb{R}^+$ (正实数),取微元 $dl = a d\theta$, θ 从 $0 \sim 2\pi$ 逆时针变化,如图5所示.

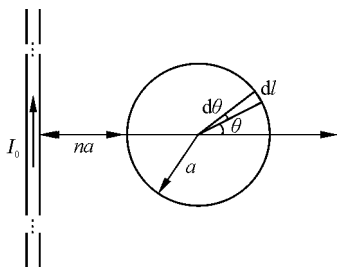


图5 圆形线圈微元示意图

微元 dl 所在位置可表示为

$$(n+1)a + a \cos \theta$$

微元 dl 处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi [(n+1)a + a \cos \theta]} \quad (12)$$

微元 dl 切割磁感线的有效切割长度为

$$dy = dl \cos \theta = a \cos \theta d\theta$$

因此可得微元以速度 v 运动时产生的感应电动势为

$$d\epsilon = \frac{\mu_0 I_0 a v \cos \theta d\theta}{2\pi [(n+1)a + a \cos \theta]} \quad (13)$$

对于圆形线圈运动产生的感应电动势为

$$\epsilon = \int_0^{2\pi} d\epsilon =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I_0 a v \cos \theta d\theta}{2\pi [(n+1)a + a \cos \theta]} \quad (14)$$

而有定积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{(n+1) + \cos \theta} d\theta = 2\pi \frac{\sqrt{n^2 + 2n} - n - 1}{\sqrt{n^2 + 2n}} \quad (15)$$

代入式(14),则有圆形线圈产生的感应电动势

$$\epsilon = \mu_0 I_0 v \frac{\sqrt{n^2 + 2n} - n - 1}{\sqrt{n^2 + 2n}} \quad (16)$$

即感应电流

$$I = \frac{\mu_0 I_0 v}{R} \frac{\sqrt{n^2 + 2n} - n - 1}{\sqrt{n^2 + 2n}} \quad (17)$$

由于 $\sqrt{n^2 + 2n} - n - 1 < 0$ 对 $\forall n > 0$ 恒成立,即感应电流小于零,与 θ 的绕行方向相反,为顺时针方向.

再计算每一段微元所受安培力,根据对称性,只需考虑线圈沿着 $+x$ 轴的受力即可.微元所受安培力 dF 可以表达为

$$dF = BI dy = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi [(n+1)a + a \cos \theta]} \cdot \left(-\frac{\mu_0 I_0 v}{R} \frac{\sqrt{n^2 + 2n} - n - 1}{\sqrt{n^2 + 2n}} \right) a \cos \theta d\theta \quad (18)$$

dF 为负是因为感应电流 I 与微元 dl 的绕行方向相反.

对 dF 积分,得到圆形线圈所受安培力的大小为

$$F = -\frac{\mu_0^2 I_0^2 v}{R} \frac{(\sqrt{n^2 + 2n} - n - 1)^2}{n^2 + 2n} \quad (19)$$

当 n 增加时,线圈在向外运动,所受合外力与运动方向相反.

考虑圆心所在位置 $x = (n+1)a$,有微分 $dx = a dn$,则运动学方程可以写为

$$F = m v \frac{dv}{dx} = m v \frac{dv}{a dn} = -\frac{\mu_0^2 I_0^2 v}{R} \frac{(\sqrt{n^2 + 2n} - n - 1)^2}{n^2 + 2n} \quad (20)$$

积分可得

$$v = v_0 + \frac{\mu_0^2 I_0^2 a}{mR} \left\{ \left[2\sqrt{n^2 + 2n} - 2n + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{n+2}{n} \right) \right] - \left[2\sqrt{n_0^2 + 2n_0} - 2n_0 + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{n_0+2}{n_0} \right) \right] \right\} \quad (21)$$



浅析光滑水平面上圆弧槽物块 下滑的最值问题

孙朝晖 池英芝 梅尹

(宁波市北仑中学 浙江宁波 315800)

(收稿日期:2022-09-06)

摘要:通过对圆弧槽物块模型的运动及受力分析,定性解释了物块对地速度变化的规律;并通过严格的物理公式推导,证明物块对地速度最大值不一定在最低点时取到,而是取决于圆弧槽与物块的质量比 k ;物块相对于圆弧槽的速度最大值以及受到圆弧槽弹力的最大值确实在最低点取到,最后在 $k=1$ 的情况下验证了定性、定量分析的正确性.

关键词:动量守恒;机械能守恒;最大速度;最大弹力;圆弧槽物块模型;临界质量比

情形描述:光滑水平面上有一水平方向可自由移动且槽表面光滑的四分之一圆弧槽,如图1所示,其质量为 M ,圆弧所对半径为 R ;圆弧槽顶端静止释放一质量为 m 且可视为质点的光滑物块,最后物块

于圆弧槽最低点分离(不考虑 $m \gg M$ 时,圆弧槽逆时针倾倒的情形).由圆弧槽和物块所构成的孤立二体系统在自由光滑水平面上,由重力引起内力相互作用,从而自主运动,系统质心水平方向保持不动,

考虑圆形线圈恰能从磁场中逃逸的情况:当 $n \rightarrow \infty$ 时,有 $v \rightarrow 0$.代入式(21)得,圆形线圈恰能从磁场逃逸的最小初速度 v'_{\min}

$$v'_{\min} = \frac{\mu_0^2 I_0^2 a}{mR}.$$

$$\left[2\sqrt{n_0^2 + 2n_0} - 2n_0 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n_0 + 2}{n_0}\right) \right] \quad (22)$$

圆形线圈在无限长直导线磁场的 $v-x$ 图像、逃逸最小初速度-电流图像与图3、图4类似,本文不再赘述.

4 总结

依据教育部考试中心2019年发布的《中国高考评价体系》,命题要关注“一核四层四翼”的命题设计,更要关注学科核心素养的深层次考查.本题模型从命题角度看很符合上述命题设计要求,创新度高,设问不难,却很好地考查了学生思维灵活性和学科核心素养.但是,命题的正确性和严谨性是基本要求,不能出现原理性漏洞,甚至是错误.

本文从牛顿运动学方程出发,分析矩形和圆形线圈在无限长载流直导线磁场中的运动,分析线圈恰能从磁场逃逸的临界初速度.从数学上证明了:当长直导线的电流越大,线圈初始位置距离离导线越近时,线圈能够逃逸所需的初速度越大;当初速度较小时,线圈无法从长直导线产生的磁场中逃逸.此外,本文在计算时假设流经无限长直导线的电流较大($\sim 10^6$ A),而这种情况在现实中是很难用实验呈现的.

本题题设诸多条件未给出,因此无法判断线圈能否从长直导线产生的磁场中逃逸,建议题干中添加“直导线中电流较大”这个暗示性语句,来保证试题的严谨性.

致谢: 本文感谢黄吉平老师的有益探讨和修改建议.

参考文献

- [1] 邹俊峻.长直交变电流磁场中圆线圈的感应电动势和感应电流[J].物理通报,2019(3):8-10.
- [2] 黄章科,金春辉,穆成富,等.任意形状磁场区域感生电动势的研究[J].大学物理,2015,34(12):45-49,60.